Senatsverwaltung für Bildung,
Jugend und Sport

Berlin

Rahmenlehrplan für Unterricht

und Erziehung in der Berliner Schule

Entwurfsfassung Mai 2004 mit den verbindlichen curricularen Vorgaben für den Unterricht in der Einführungsphase (Jahrgangsstufe 11) der gymnasialen Oberstufe im Schuljahr 2004 / 2005

Gymnasiale Oberstufe

Fach Mathematik

Inhalt

1 Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts in der gymnasialen Oberstufe

In der gymnasialen Oberstufe wird die Unterrichts- und Erziehungsarbeit der Sekundarstufe I auf der Grundlage von §3 des Schulgesetzes für das Land Berlin vom 26. Januar 2004 fortgesetzt. Die gymnasiale Oberstufe soll Kenntnisse, Fähigkeiten und auch im Fach Mathematik Werthaltungen vermitteln, die zu persönlicher Entfaltung in sozialer Verantwortlichkeit beitragen und die Schüler befähigen, Entscheidungen selbständig zu treffen, sich dabei ihrer Möglichkeiten und Grenzen bewusst zu werden und die Folgen ihres Handelns für sich selbst sowie im sozialen Kontext zu beurteilen.

Der Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe trägt wesentlich zu einer umfassenden kulturellen Bildung der Schülerinnen und Schüler bei, indem Mathematik sie dazu befähigt, ihre Erfahrungen mit der Welt analytisch wahrzunehmen, mental zu strukturieren und problembewusst zu reflektieren.

Dabei werden vielfältige Erscheinungen in einer Welt aus Natur und Technik, Gesellschaft und Kultur in einer durch mathematische Bildung geprägten Art wahrgenommen und verstanden. Diese ist durch Präzision der Begriffe und des Sprachgebrauches, durch kausales Denken und durch eine kritische Sensibilisierung gegenüber einem oberflächlichen und unreflektierten Gebrauch zahlengestützter oder mathematischer Darstellungen in Wissenschaft, Wirtschaft sowie Medien und Politik bestimmt.

Die mathematischen Gegenstände und deren Zusammenhänge, zu denen durch Sprache und Fachsprache sowie durch mathematische Symbole und Formeln Zugang gewonnen wird, werden als Schöpfung menschlichen Denkens kennen gelernt und als eine Theorie begriffen, in der induktiv legitimierte Erkenntnisse durch Wahrheiten aus deduktiv strukturiertem Denken ergänzt werden. In der Konfrontation mit mathematisch modellierbaren Problemen werden Kritikfähigkeit und Problemlösefähigkeit erworben. Diese Fähigkeiten werden nicht nur abstrakt, sondern auch realitätsbezogen entwickelt. Die strukturellen Aspekte von Lebensrealitäten werden aufgegriffen und mit mathematisch geprägten Begriffen in Algorithmen und theoretischen Modellen verarbeitet. Mathematische Begriffe, Zahlen und Formeln sind, bereits beginnend mit dem Zählen, abstrakt...

2 Kompetenzerwerb und fachliche Standards

2.1 Kompetenzerwerb im Mathematikunterricht

Der Unterricht dient der Kompetenzentwicklung bei Schülerinnen und Schülern. Kompetenz ist die Fähigkeit einer Person, auf der Grundlage gesicherter Erkenntnisse, Methoden und Regeln die sachliche Richtigkeit von Aussagen nachzuprüfen, zu beurteilen und in gesellschaftlicher Verantwortung in angemessene Handlungen umzusetzen. Für den Mathematikunterricht bedeutet dies allgemein formuliert die Kompetenz, Mathematik zu verstehen, zu beurteilen und in einer Vielzahl von inner- und außermathematischen Kontexten anzuwenden.

Der Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe vermittelt in unterschiedlichem Ausmaß die nachfolgend genannten kulturellen Basiskompetenzen:

- Mathematische Modellierungskompetenz
- Sprach- und Kommunikationskompetenz
- Kompetenz im Umgang mit Medien und Informationstechnologien und
- Kompetenz der selbständigen Regulation des Lernens.

Modellierungskompetenz bedeutet, außermathematische Situationen auf mathematische Modelle so abzubilden, dass situationsgegebene Aufgaben und Probleme einer Lösung zugeführt werden können. Eine mathematische Modellierungsfähigkeit kann entwickelt werden, wenn ausreichend mathematisch-begriffliches Wissen als auch die Routinen verfügbar sind, mathematische Algorithmen sicher zu bearbeiten. Die mathematische Modellierung ist eine Übersetzungsleistung, die nur vor dem Hintergrund einer sicheren, gut organisierten und flexibel aktivierbaren Wissensbasis erfolgreich durchgeführt werden kann. Bereits für die Entwicklung eines mathematischen Modells ist eine breit gefächerte Kenntnis der verfügbaren mathematischen Verfahren sowie der zu erwartenden Komplexität der Algorithmen, die aus der Methodenwahl hervorgeht, unverzichtbare Voraussetzung. Bei steigender Komplexität von Aufgaben und Problemstellungen wächst die Bedeutung des Vorwissens für eine erfolgreiche Bearbeitung. Der intelligente Einsatz des verfügbaren Wissens für mathematische Modellierungen und Problemlösungen ist ein langjähriger und übungsintensiver Prozess, bei dem Defizite in der Regel nicht durch kurzfristiges Lernen beseitigt werden können. Dies impliziert, dass mathematisches Modellieren auf jeder Stufe der mathematischen Bildung immanenter Bestandteil des Unterrichts sein muss und nicht als eine zeitlich nachgeordnete Ergänzung missverstanden und vernachlässigt werden darf.

Eine den Anforderungen der Mathematik genügende Sprachkompetenz ist durch einen hohen Präzisionsgrad in der Sprachverwendung, insbesondere bei der Fachsprache bestimmt. Textverstehen und Textproduktion sowie mathematisches Verstehen erfordern darüber hinaus eine bewusste Differenzierung zwischen logisch begrifflich exakter Sprachkompetenz und einer auch umgangssprachlich geprägten Kommunikationskompetenz.

Für die Mathematik und deren Verwendung in Studium und Wissenschaft gewinnt ein sowohl professioneller und dabei zugleich kritischer Umgang mit modernen Informationstechnologien zunehmend an Bedeutung. In Lebens-, Lern- und Berufssituationen ist mit einer informationstechnologischen Kompetenz der Zugang zu gesellschaftlich verfügbaren Wissensbeständen und zu modernen Kommunikationsformen verbunden.

Die Selbstregulation der Wissensaufnahme, die Steuerung der eigenen Lernprozesse mit selbst zu definierenden Zielen und die gleichzeitig durchzuführende selbständige Überwachung und Erfolgskontrolle ist eine komplexe Handlungskompetenz.

Grundsätzlich beruht jede der im folgenden geschilderten Arten von Kompetenzen auf der sicheren Verfügbarkeit von mathematischem Basiswissen. Die Aneignung dieses Basiswissens gehört daher zur Grundlage eines jeden Mathematikunterrichts.

Die beschriebenen allgemeinen Kompetenzen setzen sich zusammen aus

- den Fachkompetenzen
- den Methodenkompetenzen
- den Sozialkompetenzen
- und den Selbstkompetenzen.

Die Fachkompetenzen bestehen aus den fächerspezifischen und den fachübergreifenden Kenntnissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten. Dazu gehören u. a.

- die angemessene Verwendung der Fachsprache und der mathematischen Symbolik
- die sachgerechte Argumentation auf schülergemäßem Niveau
- das Verständnis für die Bedeutung mathematischer Begriffe
- die Reflektion über die erzielten Ergebnisse
- die Entwicklung geeigneter Fragestellungen innerhalb eines Modellierungsprozesses
- und die sichere Anwendung von Rechenverfahren und Kalkülen.

Unter Methodenkompetenzen verstehen wir alle methodischen und verfahrens- bzw. verhaltenstechnischen Fähigkeiten und Fertigkeiten, z. B. Grundtechniken wie

- Klassifizieren
- Ordnen
- Veranschaulichen
- Spezialisieren
- Verallgemeinern
- Analogisieren
- Formalisieren
- Begründen
- und Beweisen,

aber auch so wichtige Kompetenzen wie

- Problemlösefähigkeiten
- und den Umgang mit modernen Medien wie Software und Internet.

Die Sozialkompetenzen sind u. a.

- Teamfähigkeit
- Selbstständigkeit
- und Verantwortungsbewusstsein.

2.2 Eingangsstandards für den Übergang in die gymnasiale Oberstufe

Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erworben. Dementsprechend hat die Kultusministerkonferenz die Bildungsstandards für das Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss inhaltsbezogen konkretisiert. Die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss gemäß der Beschlussvorlage für die 304. KMK am 04.12.2003 sind Bestandteil der Eingangsstandards der gymnasialen Oberstufe. Aufgrund des Berliner Rahmenplanes für Mathematik für die Sekundarstufe I in der Fassung vom April 1989 (Gesamtwerk 14) können die

Kompetenzen, die der Leitidee Daten und Zufall zugeordnet sind oder zugeordnet werden könnten, vorerst nicht erwartet werden.

Zusätzlich zu den Bildungsstandards des Mittleren Schulabschlusses gehören die nachfolgend genannten inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen, geordnet nach Leitideen, zu den Eingangsstandards für die gymnasiale Oberstufe.

Leitidee Zahl

Die Schülerinnen und Schüler

- begründen die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung von den rationalen Zahlen zur Menge der reellen Zahlen an Beispielen,
- nutzen sinntragend auch irrationale Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit,
- unterscheiden die Darstellung exakter irrationaler Zahlen von sinnvoll gerundeten Rechenergebnissen.

Leitidee Messen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen das Prinzip der Intervallschachtelung bei der Flächen- und Volumenmessung sowie bei der Bestimmung von Näherungswerten reeller Zahlen.

Leitidee Raum und Form

Die Schülerinnen und Schüler

- wenden Sätze der ebenen Geometrie bei Berechnungen oder Beweisen an, dabei auch die Abhängigkeit der Längenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck von den Winkeln sowie den Sinus- und den Kosinussatz.

Leitidee funktionaler Zusammenhang

Die Schülerinnen und Schüler

- analysieren und vergleichen die Darstellungen von Funktionen und ihren Umkehrfunktionen,
- untersuchen Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen, dabei auch Sinus- und Kosinusfunktionen, Potenz- und Wurzelfunktionen sowie Exponential- und Logarithmusfunktionen,
- untersuchen Fragen der Definitionsmenge von Bruchgleichungen und deren Lösbarkeit.

2.3 Abschlussstandards

Die Abschlussstandards für die schriftliche und mündliche Prüfung im Abitur werden durch Einheitliche Prüfungsanforderungen im Fach Mathematik gemäß Beschluss der 298. KMK am 23.05. und 24.05.2002 bestimmt (EPA).

Zu den an Inhalten überprüfbaren Kompetenzen gehören

- mathematisches Argumentieren unter angemessener Verwendung der Fachsprache, sachgerechtes Umgehen mit mathematische Begriffen, Sätzen, Methoden und Algorithmen sowie Beschreiben und Veranschaulichen mathematischer Sachverhalte durch Texte und Abbildungen,
- Lösen von mathematischen Problemen und Aufgaben durch Auswahl und Verwenden geeigneter Verfahren sowie kritisches Reflektieren der Ergebnisse,

- mathematisches Modellieren zum Lösen realitätsnaher Probleme,
- Verwenden ebener und räumlicher Strukturen zur Veranschaulichung geometrischer Zusammenhänge,
- sicherer Umgang mit grundlegenden Arbeitsmethoden der Mathematik
- sachgerechtes Kommunizieren durch selbständige und kritische Auswahl von Informationen, Bearbeiten von Aufgaben und Problemen, Dokumentieren und Begründen der Arbeitsschritte des gewählten Lösungsweges und der verwendeten technischen Hilfsmittel sowie Präsentieren der Ergebnisse und kritisches Reflektieren des Lösungsweges.

Die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen werden nach Leitideen geordnet ebenfalls durch die EPA festgelegt. Die Differenzierung nach Grund- und Leistungskurs erfolgt sowohl durch eine inhaltlich quantitative als durch eine qualitative Unterscheidung in den Anforderungen. Grund- und Leistungskurs unterscheiden sich insbesondere durch

- den Grad der Strukturierung der Prüfungsaufgabe, die Offenheit der Aufgabenstellung und die Anforderungen an die Selbständigkeit bei der Bearbeitung sowie
- den Komplexitätsgrad der sich aus der Aufgabenstellung ergebenen mathematischen Objekte und Methoden.

Die nach Grund- und Leistungskurs differenzierten inhaltsbezogenen Kompetenzen sind in den tabellarischen Teilen dieses Planes und den Tabellen vorangestellten Ausführungen beschrieben.

2.4 Methodisch - didaktische Konzeption

Die Leitideen funktionaler Zusammenhang, Grenzprozess und Approximation, Modellieren, Messen, Algorithmus, räumliches Strukturieren und Zufall haben eine wesentliche Bedeutung für das didaktische Konzept des Mathematikunterrichts. Sie stellen Leitlinien dar, die mathematische Gegenstände miteinander verbinden und die Begriffe, Lehrsätze, Beweise und Algorithmen, Kenntnisse und Verfahren vernetzen. Der Unterricht sollte an diesen Leitlinien orientiert werden, um die innermathematischen Zusammenhänge der behandelten Themen herzustellen und deren Bedeutung und kulturellen Stellenwert zu reflektieren.

Mathematik erschließt sich dem Verständnis von Lernenden am besten, wenn sie in möglichst vielfältigen Kontexten erfahren werden kann. Die Leitideen ermöglichen es, Verbindungen zwischen der formalen Mathematik und ihren Anwendungen herzustellen. Insbesondere in Grundkursen sollte die Auseinandersetzung mit Mathematik an schülernahen, möglichst authentischen Anwendungen erfolgen. Fachübergreifenden Fragestellungen sollte dabei eine besondere Bedeutung zukommen.

Durch mathematische Modellierung, Lösen von inner- und außermathematischen Problemen und Entwickeln und Anwenden computergestützter Simulationen realer Prozesse kann die Nützlichkeit der Mathematik einsichtig werden. Der Vergleich von Modell und Wirklichkeit kann Grenzen der Anwendbarkeit von Mathematik aufzeigen.

Mathematikunterricht wird an Problemen und deren Lösungen orientiert. In allen Phasen des Unterrichts werden durch Problemstellungen Impulse für die weitere Arbeit gegeben. Problemorientierte Begriffsbildung, problemorientiertes Erarbeiten von Sätzen und Algorithmen und das Lösen der Probleme selbst mit der Entwicklung heuristischer Strategien sind immanente Bestandteile des Mathematikunterrichts.

Wissenschaftlichpropädeutisches Lernen erfordert, dass Schülerinnen und Schüler sich zunehmend selbständig und eigenverantwortlich mit dem Fach Mathematik auseinandersetzen, sich eigenständig Informationsquellen erschließen, systematisch und heuristisch Probleme angehen, ihre Arbeitsschritte dokumentieren, ihre Ergebnisse kritisch reflektieren und präsentieren. Unterrichtsinhalte sind daher vom Lehrer so aufzubereiten, dass die Schülerinnen und Schüler zu Selbsttätigkeit befähigt werden. Systemischen Ansätzen und Methoden wie Selbstorganisiertes Lernen (SOL), Lernen an Stationen, Expertenpuzzle, Lernen durch Lehren oder Projektlernen kommen dabei große Bedeutung zu. Durch offene Unterrichtsformen, kooperative Methoden und Handlungsorientierung können die Schülerinnen und Schüler schrittweise an Selbstständigkeit und Eigenverantwortlichkeit im Fach Mathematik herangeführt werden.

2.5 Einsatz von Computern im Mathematikunterricht

Funktionsplottprogramme, Computer Algebra Systeme (CAS) und Animationen, die in vielen Schulen oder auch über das Internet in vielfältiger Weise zur Verfügung stehen, können sinnvoll eingesetzt werden. Deren Einsatz erfordert angepasste Aufgabenstellungen und neue Unterrichtsmethoden. Dabei steht zumeist die selbständige Erarbeitung durch die Schülerinnen und Schüler im Vordergrund. Zur Unterstützung von Verständnis des Ableitungsbegriffs und der grundlegenden Begrifflichkeiten der Differentialrechnung kann bereits in der Einführungsphase der Einsatz speziell für dieses Teilgebiet entwickelter Software hilfreich sein.

Vollständige Funktionsuntersuchungen, die vorrangig dem Überblick über die Graphen der betrachteten Funktionen dienen, sind überflüssig, da mit geeigneten Plottprogrammen die Graphen gezeichnet werden können. Den fachdidaktischen Möglichkeiten des black-, grey- und whitebox-Prinzips ist Rechnung zu tragen. So kann es zu Beginn der Behandlung der Ableitungsregeln nicht sinnvoll sein, bereits einfache Funktionsterme nach dem black-box-Prinzip abzuleiten. Dagegen kann es sinnvoll sein, ganzrationale Funktionsterme, deren Koeffizienten sich aus komplexen und realistischen Anwendungssituationen ergeben, nach Einübung der Ableitungsregeln durch ein CAS abzuleiten.

Intelligente Computernutzung bietet zusätzliche Chancen, Methoden selbständigen Arbeitens zu entwickeln. CAS, dynamische Geometriesoftware, Tabellenkalkulation oder spezielle mathematische Software eröffnen Möglichkeiten für die Bearbeitung interessanter anwendungsorientierter Probleme. Rechenintensive Lösungswege, komplizierte Termstrukturen, große Datenmengen und Parameter stellen deutlich weniger Hindernisse dar. Verschiedene Modellierungen können ohne großen Zeitaufwand durchgespielt werden. Der Einsatz von mathematischer Software bietet für Schüler und Schülerinnen vielfältige Möglichkeiten zu mathematischen Entdeckungen. Die Vernetzung zwischen verschiedenen Gebieten und das Aufgreifen von fachübergreifenden Themen wird erleichtert. Der sinnvolle Einsatz des Computers erfordert zwar das grundlegende Verständnis von Algorithmen, kann jedoch den Umfang der Übungen reduzieren. Darüber hinaus ergibt sich die Möglichkeit, weitere Inhalte für den Mathematikunterricht nutzbar zu machen.

3 Themenbereiche und Inhalte

3.1 Struktur des Rahmenlehrplanes

Der Aufbau des fachlichen Teiles wird durch die Organisationsstruktur der gymnasialen Oberstufe bestimmt, durch die eine Differenzierung des Unterrichts in Grund- und Leistungskurse mit unterschiedlichen Anforderungen erfolgt. Die Differenzierung beginnt bereits in der Einführungsphase durch den Unterricht in Profilkursen, ohne dass bereits zu diesem Zeitpunkt eine irreversible Festlegung getroffen wird.

Im Fundamentalbereich und in den Grundkursen erfolgt eine wissenschaftspropädeutische Ausbildung, die zu einer vertieften Allgemeinbildung führt. Im Profilbereich und in den Leistungskursen wird eine zumindest exemplarisch vertiefte wissenschaftspropädeutische Ausbildung geboten.

In der Einführungsphase wird an den Unterricht der Klasse 10 und an die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss angeknüpft. Die Fachinhalte der Einführungsphase führen zu den Themenfeldern hin, die in der Qualifikationsphase unterrichtet werden und Grundlage für die Aufgaben der zentralen Abiturprüfung in Mathematik sind.

Der Unterricht in der Qualifikationsphase erfüllt die von der Kultusministerkonferenz (KMK) beschlossenen Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung (EPA) im Fach Mathematik mit den drei Gebieten Stochastik, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Analysis.

Im Hinblick auf zentrale Prüfungsaufgaben weist der hauptsächlich für den Fachlehrer bestimmte tabellarische Teil dieses Rahmenlehrplanes dort, wo es hilfreich sein kann, einen hohen Grad der Detaillierung auf und ist mit Beispielen versehen, mit denen die intendierte Komplexität der Aufgabenstellungen auch im schriftlichen Abitur verdeutlicht werden soll. Dies bezieht sich sowohl auf den Grad der Vertiefung als auch auf inhaltliche Abgrenzungen. Eine Beschränkung der eigenverantwortlichen Gestaltung des Unterrichts durch den Fachlehrer ist damit ausdrücklich nicht verbunden, vielmehr muss eine Profilbildung durch Ausweitung und Vertiefung erreicht werden. Für inhaltliche Ergänzungen ist allerdings insbesondere im Grundkurs wegen der von den EPA vorgegebenen Stofffülle nur geringer Raum vorhanden.

Die Unterrichtsinhalte werden in den Kapiteln 3.2 bis 3.6 für die einzelnen Schulhalbjahre der Einführungsphase und der Qualifikationsphase in tabellarischer Form ausgewiesen. Die tabellarische Darstellung vermittelt häufig eine Linearität, der mit dem Unterricht nicht gefolgt werden sollte. Die Reihenfolge innerhalb der Kurshalbjahre ist nicht verbindlich und ist gemäß der eigenen didaktischen Konzeption frei gestaltbar.

In der Spalte Unterrichtsinhalte ist immer dann auf eine kompetenzorientierte Formulierung bewusst verzichtet worden, wenn nur dadurch die notwendige Konkretion in Verbindung mit einer leichteren Lesbarkeit erreicht wurde.

Die Zuordnung der Inhalte zu den Halbjahren ist aus sachlogischen Gründen und im Hinblick auf mögliche Schulwechsel weitgehend verbindlich. Davon abweichend kann in der Qualifikationsphase in den Halbjahren Q1 und Q2 die Reihenfolge der Inhalte innerhalb der Differential- und Integralrechnung sowohl im Grundkurs als auch im Leistungskurs dem gewählten didaktischen Aufbau entsprechend angepasst werden.

Bei der Darstellung mathematischer Sätze und Formeln in den Tabellen ist auf die Nennung der zu Grunde liegenden Voraussetzungen in der Regel verzichtet worden, um den Umfang der Tabellen zu reduzieren.

Zur besseren Übersichtlichkeit sind die Kopfzeilen an jedem Tabellenanfang grau hinterlegt, die Kopfzeilen nach einem Seitenumbruch innerhalb einer Tabelle dagegen weiß belassen.

3.1.1 Übersicht Einführungsphase

Im Fundamentalbereich der Einführungsphase sind die Gebiete Stochastik I, Koordinatengeometrie sowie Differentialrechnung I ganzrationaler und trigonometrischer Funktionen vorgesehen.

Im Profilbereich werden mit Beweisverfahren und insbesondere mit Grenzwerten von Folgen und Reihen Voraussetzungen für den Leistungskurs geschaffen.

Die angegebenen Gewichtungen für die Inhaltsbereiche der Schulhalbjahre der Einführungs- und der Qualifikationsphase haben orientierenden Charakter, entbinden nicht von einer eigenen Arbeitsplanung unter Berücksichtigung der in den Schulhalbjahren verfügbaren Unterrichtszeiten und stehen Vertiefungen oder Ergänzungen nicht im Wege.

Schulhalbjahr	11. Klasse Fundamentum	Gewichtung
11.1	Stochastik I	1/3
	Koordinatengeometrie / Funktionen	2/3
11.2	Differentialrechnung I	1/1
	11. Klasse Profilbereich	
11.1	Entdecken, Begründen, Beweisen	1/1
11.2	Folgen und Reihen, Grenzwerte	1/1

3.1.2 Übersicht Grundkurs

Durch den Aufbau wird gewährleistet, dass einerseits alle drei von den EPA geforderten Themenfelder Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik für die Abiturprüfung verfügbar und andererseits viele Gebiete in einer prüfungsdidaktisch sinnvollen zeitlichen Nähe zum schriftlichen Abitur Unterrichtsgegenstand sind.

Der didaktische Aufbau der vier Grundkurse geht von dem Konzept aus, Inhalte verschiedener Sachgebiete auf mehrere Kurshalbjahre zu verteilen. Dadurch wird eine immanente Wiederholung und die Vorbereitung auf das schriftliche Abitur erleichtert. Für die Analytische Geometrie, die in der Qualifikationsphase ausschließlich im 3. Kurshalbjahr behandelt wird, ist der Umgang mit linearen Gleichungssystemen ohne eine eigene Unterrichtseinheit innerhalb der anderen Themenfelder vorgesehen.

Die Grundkurse können wegen des didaktischen Aufbaus nur in der Reihenfolge Q1-Q2-Q3-Q4 durchlaufen werden.

Schulhalbjahr	12. Schuljahr Grundkurs	Gewichtung
Q 1	Integralrechnung I	1/2
	Differential- und Integralrechnung II: Trigonometrische Funktionen	1/2
Q 2	Differential- und Integralrechnung III: Exponential- und Logarithmusfunktion, gebrochen rationale Funktionen	2/3
	Stochastik II	1/3
	13. Schuljahr Grundkurs	
Q 3	Analytische Geometrie	1/1
Q 4	Differential- und Integralrechnung IV / Komplexe Aufgaben	2/3
	Schriftliches Abitur	
	Stochastik III	1/3

3.1.3 Übersicht Leistungskurs ohne jahrgangsübergreifenden Unterricht

In den Halbjahren Q1 und Q2 kann die Reihenfolge der Inhalte innerhalb der Differential- und Integralrechnung dem gewählten didaktischen Aufbau entsprechend angepasst werden.

Schulhalbjahr	12. Schuljahr Leistungskurs	Gewichtung
Q 1	Differentialrechnung II	2/3
	Integralrechnung I	1/3
Q 2	Differentialrechnung III	1/3
	Integralrechnung II	1/3
	Stochastik II	1/3
	13. Schuljahr Leistungskurs	
Q 3	Analytische Geometrie	1/1
Q 4	Stochastik III	1/3
	Komplexe Aufgaben	1/3
	Schriftliches Abitur	
	Stochastik IV	1/3

3.1.4 Übersicht Leistungskurs bei jahrgangsübergreifendem Unterricht

Schulen, die zur Erlangung tragfähiger Kursfrequenzen in ihren Leistungskursen Mathematik jahrgangsübergreifenden Unterricht einrichten möchten, können den Unterricht auch in der Kursfolge Q3-Q4-Q1-Q2 durchführen. In dem Falle ist im Kurs Q4 vor der Stochastik III die Stochastik II statt des Themengebietes Komplexe Aufgaben zu unterrichten. Komplexe Aufgaben rücken in diesem Fall an das Ende des Kurses Q2. Im Themengebiet Komplexe Aufgaben können in diesem Fall ausschließlich Aufgaben aus dem Bereich der Differential- und Integralrechnung behandelt werden.

Für die jeweiligen Prüflinge des jahrgangsübergreifenden Kurses entfällt ein Teil der Inhalte entweder aus der Integralrechnung II oder aus der Stochastik III. Für die übrigen Kursteilnehmer muss der Unterricht im Hinblick auf deren zentrale Prüfungen im Folgejahr uneingeschränkt weitergeführt werden.

<table>
<tr><th>Kurshalbjahr</th><th colspan="2">Leistungskurs jahrgangsübergreifend</th><th>Gewichtung *)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Q 1</td><td colspan="2">Differentialrechnung II</td><td>2/3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Integralrechnung I</td><td>1/3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Q 2</td><td colspan="2">Differentialrechnung III und Integralrechnung II.1</td><td>1/3</td></tr>
<tr><td>Schriftliches Abitur</td><td>Integralrechnung II.2</td><td>1/5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Komplexe Aufgaben aus der Analysis</td><td>1/3</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Leistungskurs jahrgangsübergreifend</td><td></td></tr>
<tr><td>Q 3</td><td colspan="2">Analytische Geometrie</td><td>1/1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Q 4</td><td colspan="2">Stochastik II</td><td>1/3</td></tr>
<tr><td>SchriftlIches Abitur</td><td>Stochastik III</td><td>1/5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Stochastik IV</td><td>1/3</td></tr>
</table>

*) Bei jahrgangsübergreifenden Kursen endet der Unterricht in Q2 und in Q4 für die Prüflinge und für die übrigen Kursteilnehmer zu verschiedenen Zeitpunkten. Angegeben sind als Orientierungshilfe die Gewichtungen für die jeweiligen Prüflinge mit Bezug auf die gesamte Unterrichtszeit der jeweiligen Schulhalbjahre.

3.2 Einführungsphase Fundamentum

Einführungsphase 1. Halbjahr Stochastik I: Beschreibung des Zufalls

Ziel ist eine stochastische Allgemeinbildung, die zu einem vernünftigen Verhalten in Situationen der Ungewissheit im beruflichen, gesellschaftlichen und persönlichen Leben qualifiziert.

Durch die mathematische Beschreibung von zufallsabhängigen Vorgängen bei adäquater Verwendung zentraler Begriffe und Methoden der Statistik und Stochastik sowie durch eine kritische Bewertung der Ergebnisse werden vielfältige Kompetenzen vermittelt.

Erreicht werden eine Kompetenz im Erfassen, Darstellen und Zusammenfassen von Daten, eine Kompetenz im Modellieren zufälliger Vorgänge, eine Kompetenz im begründeten Schließen in unsicheren Situationen und eine Kompetenz bei der Planung von statistischen Untersuchungen.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Zufall und Wahrscheinlichkeit	Zufall als das Eintreten nicht vorhersagbarer Ereignisse Wahrscheinlichkeit allgemein als Grad der Gewissheit über das Eintreten eines zufälligen Ereignisses Der praktischen Erprobung soll genug Raum zur Verfügung stehen, z. B. für Messvorgänge, Stichproben, Umfragen, Aktienrenditen oder Glückspiele.
• Aufbereitung von Datenmengen	Klassifizierung und Erhebung von Daten: Merkmal, Merkmalsausprägung, Skalen Tabellarische Aufbereitung, auch Klassierung von Daten nach Merkmalsklassen: Urliste, absolute und relative Häufigkeit Die Durchführung einer selbständigen Befragung kann an dieser Stelle sinnvoll sein.
• graphische Darstellung von Datenmengen	Verschiedene Darstellungsarten vergleichen und unterscheiden Lesen und interpretieren von graphischen Darstellungen An dieser Stelle können Tabellenkalkulationsprogramme verwendet werden.
• Kenngrößen	Der Sinn und die Problematik von arithmetischem Mittelwert, Median und Streuungsmaßzahlen sollen an vielfältigen Beispielen behandelt werden.
• relative Häufigkeit eines Ereignisses und empirisches Gesetz der großen Zahlen	Relative Häufigkeit als Schätzwert für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit verwenden und interpretieren, Wahrscheinlichkeit als Prognose für die relative Häufigkeit anwenden
• Ergebnis, Ergebnismenge, Ereignisse, Wahrscheinlichkeit von Ereignissen • Laplace-Wahrscheinlichkeit	Verwenden der Grundbegriffe zur mathematischen Modellierung eines Zufallsexperiments Sonderfall bei Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit aller Ergebnisse Auf eine systematische Behandlung der Kombinatorik kann verzichtet werden.
• Baumdiagramme für mehrstufige Zufallsexperimente • Pfadregeln: Produkt- und Summenregel	Modellierung eines Zufallsexperiments durch ein Baumdiagramm mit den einzutragenden Wahrscheinlichkeiten in den Stufen Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten durch Verknüpfung der eingetragenen Wahrscheinlichkeiten zu Wahrscheinlichkeiten von Pfaden

Einführungsphase 1. Halbjahr Fundamentum: Koordinatengeometrie und Funktionen

Dieser Abschnitt Koordinatengeometrie dient sowohl einer Wiederholung als auch der Vertiefung und Ergänzung von in der Sekundarstufe I behandelten Inhalten. Zu Grunde liegen die folgenden mathematischen Leitideen: Messen, Strukturieren in der Ebene und im Raum, funktionaler Zusammenhang und mathematisches Modellieren. Die Lerninhalte sind so weit wie möglich in einem Anwendungszusammenhang zu unterrichten. Ein Teil der Lerninhalte wird in der vektoriellen analytischen Geometrie wieder aufgegriffen.

Im Rahmen von Wiederholungen in diesem Lernabschnitt bieten sich Möglichkeiten durch geeignete Unterrichtsformen für Beiträge zum Erwerb von Sozial- und Methodenkompetenzen. Formen von Gruppenarbeit, Lernen durch Lehren oder Lernen an Stationen lassen sich realisieren. Wiederholungen und Ergänzungen können durch Schüler selbst organisiert werden. Selbstorganisiertes Lernen (SOL) ist ein Konzept mit vielseitigen Anregungen.

An den gymnasialen Oberstufen von Gesamtschulen sind Grundkenntnisse über Exponential- und Logarithmusfunktionen gemäß Rahmenplan für die Sekundarstufe I, Teil B III a 13, Klasse 10, zu vermitteln. Ergänzungen und Vertiefungen der anderen Lernfelder müssen entsprechend eingeschränkt werden.

Eine Wiederholung und Vertiefung des Funktionsbegriffs und der verschiedenen Darstellungen von Funktionen ist möglich. Die Schüler müssen mit verschiedenen Schreibweisen für Funktionen vertraut sein, zumindest mit $f(x) = 2x + 5$, mit $f: x \mapsto 2x + 5$ und mit $y = 2x + 5$. Wegen des Zentralabiturs ist eine Verbindlichkeit bei der Kenntnis dieser Darstellungen erforderlich.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
Koordinatensysteme der Ebene und des Raumes • Darstellung von Punktmengen • Abstand zweier Punkte in der Ebene und im Raum • Länge einer Strecke • Teilungspunkte von Strecken, insbesondere Mittelpunkt	Es kann auch auf nichtkartesische Koordinatensysteme, auf Polarkoordinaten oder auf räumliche Koordinatensysteme eingegangen werden. Abstandsberechnungen können zur Bestimmung von Seitenlängen, z. B. im Dreieck, oder der Länge von Streckenzügen verwendet werden.
Geraden im ebenen Koordinatensystem • Zwei-Punkte-Form und Achsenabschnittsform, Punktsteigungsform der Geradengleichung • Nullstellen • Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden, Lagebeziehungen zwischen Punkt und Gerade	Ein Anknüpfen an die Hauptform $y = m \cdot x + n$ ist möglich. Untersuchung auf Parallelität, speziell Identität, und auf Orthogonalität; Schnittpunkts- und Schnittwinkelbestimmungen, Abstand eines Punktes von einer Geraden, Abstand paralleler Geraden.
Parabeln im ebenen Koordinatensystem • Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen • Lage von Parabeln im Koordinatensystem • Scheitelgleichung • Lagebeziehungen zwischen Geraden und Parabeln, Sekante, Tangente, Passante • Parabeln als Graphen von Relationen	Mit einer Bestimmung von Parabelgleichungen aus Koordinaten von Punkten ist eine Wiederholung und Anwendung von Systemen linearer Gleichungen möglich. Verschiebung in Richtung der Koordinatenachsen, Spiegelung an der x-Achse, Nullstellen, Symmetrie Optimierungsprobleme können ohne Differentialrechnung gelöst werden. Die Betrachtung von Lagebeziehungen von Geraden und Kreisen oder Parabeln kann ein Zugang zum Tangentenbegriff ohne Mittel der Differentialrechnung sein. Anwenden quadratischer Funktionen, z. B. auf Parabolspiegel bzw. Scheinwerfer

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
Kreise im ebenen Koordinatensystem • Gleichung des Kreises in Mittelpunktslage • Lagebeziehungen von Kreisen und Geraden, Sekante, Tangente und Passante, sowie von Kreisen und Punkten	Verallgemeinerungen auf Kreise in beliebiger Lage im Koordinatensystem und auf Ellipsen sowie Kreisgleichungen in Parameterdarstellung sind möglich.
Trigonometrische Funktionen • Graphen von $f: x \mapsto a \cdot \sin(bx+c)$, $f: x \mapsto a \cdot \cos(bx+c)$	Es wird angeknüpft an sin, cos und tan als Funktionen und an das Bogenmaß aus dem 10. Schuljahr. Eine physikalische Interpretation der Parameter a, b, c ist möglich.

Einführungsphase 2. Halbjahr: Differentialrechnung I

Ziele dieses Unterrichtsabschnitts sind die Entwicklung einer anschaulichen Vorstellung des Differentialquotienten. Folgerungen sind zu ziehen und die gewonnenen Aussagen in vielfältigen Sachbezügen anzuwenden.

Schwerpunktmäßig dient der Lernabschnitt Differentialrechnung I der Einführung des Ableitungsbegriffs. Die Ableitung ist sowohl als lokale Änderungsrate als auch als Tangentensteigung zu deuten. Die Ableitung ist als Grenzwert des Differenzenquotienten zu definieren. Dabei wird der Grenzwertbegriff propädeutisch verwendet, da ein exaktes Konvergenzkriterium für Folgen über ε-Umgebungen mit einer Bestimmung von $n_0(\varepsilon)$ ebenso wenig wie die entsprechenden Konvergenzkriterien für Funktionen als inhaltliche Voraussetzung zur Verfügung stehen. Eine sowohl anschaulich geprägte als auch nicht formale Herangehensweise ist den Zielen im Fundamentalbereich der Einführungsphase und im Grundkurs der Qualifikationsphase angemessen.

Der Beziehungshaltigkeit des Ableitungsbegriffs kann u. a. durch das Aufgreifen des physikalischen Begriffs der Momentangeschwindigkeit Rechnung getragen werden. Es sollten allerdings auch nicht physikalische Beispiele behandelt werden. Der Einführung des Ableitungsbegriffs ist genügend Raum, ca. 8 Unterrichtsstunden, zu geben.

Die zu behandelnden Eigenschaften von Funktionen erhalten in Anwendungskontexten zu interpretierende Bedeutungen. Unreflektierte und schematische Funktionsuntersuchungen sind möglichst zu vermeiden.

Etwa ein Viertel der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit ist dem Anwendungsbezug und der Modellbildung zu widmen. Zur Beschreibung geeignete Funktionenklassen sind z. B. ganzrationale Funktionen und trigonometrische Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(bx+c)$.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Elementare Eigenschaften ganzrationaler Funktionen	Die Behandlung der Eigenschaften Symmetrie, Verhalten im Unendlichen, Nullstellenbestimmung, auch mit Hilfe der Polynomdivision, und Monotonie ist dem gewählten fachdidaktischem Aufbau nach geeignet in den Lernabschnitt zu integrieren.
• Mittlere Änderungsrate und Sekantensteigung • Lokale Änderungsrate und Tangentensteigung	Es sind vielfältige Interpretationen mittlerer Änderungsraten mit außermathematischem Bezug anzustreben. Dabei sollten zumindest Beispiele zum mittleren Bevölkerungswachstum und zum Begriff der Durchschnittsgeschwindigkeit behandelt werden. Intention ist, dem Ableitungsbegriff in vielfältigen, auch nicht geometrischen Anwendungssituationen einen Sinn zu geben. Außermathematisch stehen z. B. die Momentangeschwindigkeit, die Dichte eines Gases, die Verkehrsdichte, das Temperaturgefälle oder die Geschwindigkeit chemischer Reaktionen zur Verfügung. Folgengrenzwerte stehen explizit nicht zur Verfügung. Formale Berechnungen von Grenzwerten von Differenzenquotienten können auf einen geringem Umfang, soweit wie für den Aufbau der Theorie erforderlich beschränkt werden.
• Die Ableitungsfunktion • Berechnungen von Ableitungsfunktionen bei einigen ausgewählten Funktionstypen	Dem Abstraktionsgrad des Begriffs ist durch die Behandlung zahlreicher Beispiele Rechnung zu tragen. Es sollte zum Aufbau eines grundlegenden Verständnisses auch graphisch differenziert werden. Es sollen Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten, einfache ganzrationale Funktionen, einfachste gebrochen rationale Funktionen mit Hyperbelästen als Graphen sowie die Quadratwurzelfunktion behandelt werden.
• Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion • Ableitungsregeln: Faktorregel, Summen- und Differenzregel, Potenzregel für natürliche Exponenten und für die Exponenten $n=-1$ und $n=\frac{1}{2}$ • Spezialfall der Kettenregel bei linearer innerer Funktion • Das Newton-Verfahren • Monotoniekriterien • Höhere Ableitungen	Es genügt graphisches Differenzieren. Auf eine formale Herleitung kann verzichtet werden. Die Bedeutung der Ableitungsregeln soll an den Funktionsgraphen zumindest exemplarisch geometrisch verdeutlicht werden. Es sind Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten, ganzrationale Funktionen und trigonometrische Funktionen der Form $f: x \mapsto a \cdot \sin(bx+c)$ bzw. $f: x \mapsto a \cdot \cos(bx+c)$ zu behandeln. Die Kettenregel bei linearer innerer Funktion kann an Beispielen plausibel gemacht werden. Auch graphisches Differenzieren ist möglich. Konvergenzuntersuchungen beim Newton-Verfahren müssen wegen des nicht verfügbaren Grenzwertbegriffs von Folgen nicht erfolgen. Es genügt anschaulich auf die Konvergenzproblematik aufmerksam zu machen. Die Monotoniekriterien können der Anschauung entnommen werden. Die Bedeutung des Vorzeichens der 2. Ableitung für die Art der Krümmung eines Funktionsgraphen ist zu verdeutlichen. Außermathematische Bezüge, z. B. zum Begriff der Beschleunigung, sollen hergestellt werden.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Notwendige Bedingungen für relative Extremstellen und für Wendestellen • Vorzeichenwechselkriterien für relative Extremstellen und Wendestellen • Zweites hinreichendes Kriterium für relative Extremstellen und für Wendestellen	Es sind jeweils beide hinreichenden Kriterien zu behandeln und der Unterschied in ihren Anwendungen ist zu verdeutlichen. Die hinreichenden Bedingungen $f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0$ und $f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$ können für ganzrationale Funktionen bevorzugt verwendet werden. Für einen Nachweis der Nicht-Umkehrbarkeit können Gegenbeispiele verwendet werden.
• Extremwertprobleme, Definitionsbereiche, Randwertuntersuchungen	Es sind innermathematische und kontextbezogene Probleme zu behandeln, die auf ganzrationale Funktionen vom Grad größer als 2, einfache trigonometrische Zielfunktionen, die Wurzelfunktion oder einfachste gebrochen rationale Funktionen mit Hyperbelästen als Graph führen.
• Funktionsuntersuchungen unter ausgewählten Aspekten • Scharen von Funktionsgraphen • Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen	Funktionsuntersuchungen sind exemplarisch anhand einiger Aspekte und an verschieden strukturierten Beispielen vorzunehmen. Dabei sind ganzrationale Funktionen vom Grad größer als 2 und trigonometrische Funktionen der Form $f(x)=a\cdot\sin(bx+c)$ oder $f(x)=a\cdot\cos(bx+c)$ zu berücksichtigen. Der Anwendungsbezug steht im Vordergrund. Als Untersuchungskriterien können gelten: Symmetrie, Periodizität, Verhalten im Unendlichen, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, Monotonie- und Krümmungsverhalten. Es sollen einparametrige Funktionenscharen von einem in diesem Unterrichtsabschnitt betrachteten Funktionstyp behandelt werden. Eine sinnvolle Auswahl ist zu treffen. Zur Ermittlung der Koeffizienten von Funktionstermen ganzrationaler Funktionen sind lineare Gleichungssysteme zu lösen. Eine Festlegung auf einen bestimmten Lösungsalgorithmus ist nicht beabsichtigt.

3.3 Einführungsphase Profilkurs

1. Halbjahr Profilkurs: Entdecken, Begründen, Beweisen

Zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen gehört das mathematische Argumentieren, insbesondere das Beweisen von mathematischen Aussagen. In diesem Kurs sollen verschiedene Beweisverfahren bereitgestellt und analysiert werden. Anhand von einfachen Beispielen, z. B. aus dem Unterricht der Sekundarstufe I, sollen der Aufbau eines mathematischen Satzes, die Begriffe Satz und Kehrsatz sowie die Möglichkeiten, Aussagen zu beweisen oder zu widerlegen vertiefend behandelt werden.

Die grundlegenden Kompetenzen einer mathematischen Argumentation und Kommunikation sowie einer Problemlösung lassen sich vielfältig entwickeln. Es können elementare Sätze wiederholt und in ihrer Bedeutung beleuchtet werden. Gut geeignet sind elementargeometrische Sätze. Dynamische Geometrie-Software kann hier zum Einsatz kommen.

Heuristische Strategien zum Finden eines Beweises können entwickelt und Sätze können entdeckend gefunden und dann bewiesen werden. Die Notwendigkeit von Beweisen kann an geeigneten Beispielen bewusst gemacht und das Beweisbedürfnis geweckt werden.

Eine Steigerung der Motivation ist mit Beweisen an solchen Beispielen verbunden, deren Aussagen nicht unmittelbar als einsichtig angesehen werden.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
Aufbau eines mathematischen Satzes • Begriffe Voraussetzung, Behauptung, Kehrsatz, All- und Existenzaussagen, wahre und falsche Aussagen, notwendige und hinreichende Bedingungen	Der Aufbau eines Satzes soll an bekannten Beispielen behandelt und geklärt werden. Die erforderlichen aussagenlogischen Verknüpfungen sind anzusprechen.
Beweisen eines mathematischen Satzes • Verschiedenen Formen des direkten Beweises, Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis), Beweis durch vollständige Induktion	Die Beweismethode der vollständigen Induktion soll einen breiten Raum einnehmen, wobei Aussagen über Summen, Teilbarkeit und aus der Kombinatorik zu behandeln sind. Rekursive Verfahren können eingebettet werden.

2. Halbjahr Profilkurs: Folgen und Reihen, Grenzwerte

Die Inhalte dieser Unterrichtseinheit dienen der Vorbereitung eines tieferen Verständnisses infinitesimaler Prozesse im Leistungskurs insbesondere im 1. Halbjahr der Qualifikationsphase sowie der Sicherung und Weiterentwicklung algebraischer Fähigkeiten.

Den Schülerinnen und Schülern soll die Möglichkeit eingeräumt werden, zu Beginn des 2. Halbjahres der Einführungsphase in den Profilkurs Mathematik zu wechseln, wenn erst zu diesem Zeitpunkt, mit der bevorstehenden Wahl der Fächer für die Qualifikationsphase, eine Entscheidung für das Leistungskursfach Mathematik getroffen wird.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
Zahlenfolgen • Endliche Folgen und unendliche Folgen • Spezielle Folgen , z. B. alternierende Folgen, arithmetische Folgen, geometrische Folgen • Rekursiv definierte Folgen, explizite Darstellung rekursiv definierter Folgen	Der Begriff der Zahlenfolge soll als diskrete Veränderliche und kann auch als Funktion $n \mapsto a(n)$ mit $D_a = N$ verwendet werden. Auch im Profilkurs ist eine anwendungsorientierte Behandlung von Folgen und Reihen und deren Grenzwerten einer rein abstrakten Vorgehensweise vorzuziehen.
Grenzwerte von Folgen • Definition des Grenzwertes einer Folge • Monotonie und Beschränktheit von Folgen • endliche und unendliche Folgen • Nullfolgen • konvergente und divergente Folgen, bestimmte und unbestimmte Divergenz, • Untersuchungen auf Konvergenz und Bestimmung von Grenzwerten oder Häufungswerten • Grenzwertsätze für Summe, Produkt und Quotient konvergenter Folgen, Gegenbeispiele zur Umkehrbarkeit	Als bekannte Beispiele können z. B. aufgegriffen werden: gedämpfte Schwingungen, springender Flummiball, Pendel, Schwingungen einer Flüssigkeit in einem U-Rohr, Zinseszins, Verdichtung der Zinstermine mit einer Untersuchung von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und der möglichen Definition von e. Der Begriff der Stetigkeit ist für die stetige Verzinsung nicht erforderlich. Intervallschachtelungen können an Sachverhalten, die aus der Sekundarstufe I bekannt sind, präzisiert werden, z. B. der näherungsweisen Bestimmung von $\sqrt{2}$ oder von π .
Reihen als Folgen von Partialsummen • Reihe natürlicher Zahlen und Reihe der Quadratzahlen, Summenformeln • Konvergenz von Reihen • Geometrische Reihe und ihre Konvergenz	Es kann an bereits aus der Sekundarstufe I bekannte Folgen und zum Teil an deren empirische Grenzwertermittlung angeknüpft werden, z. B. an die Bestimmung der Formeln für das Volumen von Pyramide, Kreiskegel oder Kugel durch Intervallschachtelungen. Weitere Beispiele können das Wachstum , der Ratenspar- oder Kreditvertrag, Kapitalentwicklung mit Zinseszins bei Kapitalzu- oder -abfluss, die Approximation des Kreisumfangs durch einbeschriebene regelmäßige n-Ecke mit der expliziten Darstellung $s_n = 2r \cdot n \cdot \sin\frac{\pi}{n}$ sein.

3.4 Grundkurse

3.4.1 Q1 Grundkurs: Differential- und Integralrechnung

Die Intergralrechnung öffnet Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, zunächst ohne Vorkenntnisse aus der Differentialrechnung einen Zugang zu dem neuen Thema zu finden. Dadurch wird zu Beginn des Schulhalbjahres das Aufarbeiten oder Wiederholen von Inhalten aus der Einführungsphase erleichtert. Dies betrifft insbesondere Schülerinnen und Schüler, die ihr 11. Schuljahr ausschließlich an einer Schule im Ausland absolviert haben.

Intention insbesondere im Grundkurs ist der Vorrang für das Verständnis der mathematischen Zusammenhänge vor algebraisch aufwändigen formalen Herleitungen oder vollständigen Beweisen.

Integralrechnung I: Bestimmtes Integral und Hauptsatz

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
Bestimmtes Integral • Bestimmtes Integral als Grenzwert von Ober- und Untersummen für konkrete elementare ganzrationale Funktionen bezüglich zunächst einfacher Intervalle	Ein vorgegebenes Problem, z. B. ein Flächenproblem, wird gelöst. Die Bestimmung von Flächeninhalten von Flächen, die nicht nur geradlinig berandet sind, führt zu einer Definition des bestimmten Integrals in algebraisch einfachen Fällen. Benötigte Summenformeln können ohne Beweis verwendet werden. Der Grenzwertbegriff kann propädeutisch verwendet werden. Die Konvergenz von Nullfolgen wird dann durch Testeinsetzungen plausibel.
Definition von $\int_a^b f(x)dx$ Verallgemeinerungen des bestimmten Integrals bezüglich • Integrand • Intervallgrenzen • a und b auch als negative Intervallgrenzen • Definition des bestimmten Integrals: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$	Verwenden der Integraldarstellung Das Verständnis hat Vorrang vor schematischen Herleitungen. Induktive Schlüsse ohne Nachweis sind zulässig.
Eigenschaften des bestimmten Integrals • Intervalladditivität • Vertauschen der Integrationsgrenzen • Linearitätseigenschaften: Additivität und Homogenität • Unterscheidung von Integral und Flächenmaßzahl	Anwenden der Integraldarstellung Die Beweise müssen nicht geführt werden. Es genügt, die Zusammenhänge an einfachen Beispielen entdecken zu lassen und plausibel zu machen. Plausibilitätsbetrachtungen an konkreten Aufgabenstellungen genügen.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung • Zusammenhänge zwischen Integration und Differentiation • $\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b$ • Stammfunktionen	Auf einen formalen Beweis des Hauptsatzes $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$ kann verzichtet werden. Das Erkennen der Zusammenhänge kann an konkreten Beispielen erfolgen. Dabei können Integral- oder Flächeninhaltsfunktionen verwendet werden, ohne dass sie begrifflich thematisiert werden müssen.
Berechnungen von Flächeninhalten • Berechnung von Flächenmaßzahlen für Flächen zwischen dem Graphen einer ganzrationalen Funktion und der x - Achse. • Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen	Anwenden von Lösungsverfahren, Bestimmen von Stammfunktionen zu ganzrationalen Funktionen Lösungsideen formulieren und reflektieren: Die Berechnung von Flächenmaßzahlen kann für den Fall, dass Graphenabschnitte oberhalb der x - Achse betrachtet werden, unmittelbar aus der Anschauung gewonnen und in den übrigen Fällen durch eine vorangestellte Verschiebung erreicht werden.
• Sachaufgaben, die eine Integration ganzrationaler Funktionen beinhalten • Rekonstruktionsaufgaben auch unter Berücksichtigung von Integrationsbedingungen • Zeichnen von Graphen	Volumenmaßzahlen von Rotationskörpern können einbezogen werden. Eine Reaktivierung von aus der Einführungsphase bekannte Methoden der Differentialrechnung ist an dieser Stelle vorgesehen. Das Lösen von LGS soll wiederholt, jedoch nicht zu einem eigenständigen Lernabschnitt entwickelt werden. Bei entsprechender technischer Ausstattung können auch im Grundkurs CAS eingesetzt werden.

Differential- und Integralrechnung II: Trigonometrische Funktionen

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Integration der trigonometrischen Funktionen sin und cos und einfacher verketteter oder zusammengesetzter Funktionen	Die selbständige Integration kann sich auf Funktionen f vom Typ $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ beschränken. Für Sachaufgaben benötigte Stammfunktionen größerer Komplexität können vorgegeben und durch Ableiten überprüft oder durch CAS bestimmt werden.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Sachaufgaben, z. B. Extremwertaufgaben, die auf trigonometrische Funktionen führen • Produktregel • Erweiterung der Kettenregel für nicht lineare innere Funktionen • Untersuchung zusammengesetzter trigonometrischer Funktionen	Zugunsten einer sachbezogenen Reflexion und Interpretation von Ergebnissen ist in diesem Zusammenhang ein Verzicht auf vollständige schematische Funktionsuntersuchungen sinnvoll. Beweise von Ableitungsregeln müssen nicht immer ausgeführt werden. Es können auch induktive Schlüsse oder CAS zugelassen und entstehende Beweislücken bewusst gemacht werden Elemente von oder vollständige Funktionsuntersuchungen müssen einen Schwierigkeitsgrad von Funktionen f mit z. B. $f(x) = \sin x \cdot (1 + \sin x)$ oder mit $f(x) = (\cos(x))^2$ nicht übersteigen. Benötigte Additionstheoreme können ohne Herleitung einer Formelsammlung entnommen werden.

3.4.2 Q2 Grundkurs: Differential- und Integralrechnung III, Exponential- und Logarithmusfunktionen, gebrochen rationale Funktionen

Der thematische Übergang von Q1 nach Q2 kann unter Berücksichtigung der Länge der Schulhalbjahre und einer Unterrichtsplanung für das gesamte Schuljahr flexibel gestaltet werden.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Ableitung von Exponentialfunktionen • Eulersche Zahl e als ausgezeichnete Basis • Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^x$	Eine Wiederholung von Exponentialfunktionen zu verschiedenen Basen, Definitions- und Wertemenge sowie Monotonie in Abhängigkeit von der Basis ist möglich. Die Exponentialfunktionen können auch in Unterscheidung zu Potenzfunktionen betrachtet werden. Die Existenz der Ableitung an einer Stelle kann der Anschauung entnommen werden. Für konkrete Beispiele, z. B. bei Wachstumsfunktionen f mit $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$ usw. können die Grenzwerte $f'(0)$ mit dem Taschenrechner durch Testeinsetzungen approximiert werden.
• Umkehrfunktionen • Logarithmus- und Exponentialfunktionen als gegenseitige Umkehrfunktionen • Ableiten der Umkehrfunktion • Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion • Stammfunktionen der Funktionen f_n mit $f_n(x) = x^n$ für $n \in Q$	Alternativ zum Einstieg über die Ableitung der Exponentialfunktionen kann auch der Zugang über die Integration von $f_n(x) = x^n$ für $n \in Z^-$, mit näherungsweiser graphischer Ermittlung einer Stammfunktion für $n = -1$ zu f mit $f(x) = x^{-1}$ durch $F(x) = \int_1^x \frac{1}{z} dz$, $x \in R^+$, mit $F(x) = \ln(x)$ erfolgen. Die Ableitung der Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ kann unmittelbar aus der Ableitung von ln hergeleitet werden. An die Potenzregel der Einführungsphase für $n = -1$ und $n = \frac{1}{2}$ kann angeknüpft werden.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Sachaufgaben in Zusammenhängen mit Logarithmus- oder Exponentialfunktionen • Wachstums- und Zerfallsfunktionen • Ermittlung von Funktionsgleichungen zu empirisch gewinnbaren Daten	Sachaufgaben, die eine Untersuchung von Logarithmus- oder Exponentialfunktionen erfordern, gebührt gegenüber bezugslosen Funktionsuntersuchungen Vorrang.
• Funktionsuntersuchungen von zusammengesetzten und verketteten Logarithmus- und Exponentialfunktionen	Die Komplexität der Funktionsterme muss z. B. $f(x)=(x-2)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ oder $f(x)=\dfrac{\ln(x^2)}{x}$ nicht übersteigen.
• Quotientenregel	Die Quotientenregel kann durch Rückführung auf bereits bekannte Ableitungsregeln ermittelt werden.
• Gebrochen rationale Funktionen	Gebrochen rationale Funktionen müssen nur in dem Umfang verwendet werden, wie es für das Lösen von Sachproblemen oder die Untersuchung von Logarithmusfunktionen notwendig ist. Eine Beschränkung auf Fälle mit waagerechter Asymptote und mit senkrechten Asymptoten ist zulässig.
• Untersuchung an den Rändern des Definitionsbereiches	Das Verhalten an Rändern des Definitionsbereiches gegebenenfalls einschließlich $\pm\infty$ kann durch elementare Überlegungen oder numerisch durch Testeinsetzungen plausibel gemacht werden.
• Einparametrige Funktionenscharen	Im Grundkurs kann eine Beschränkung auf einfach erkennbare Fallunterscheidungen erfolgen, z. B. wie bei Funktionen f mit $f(x)=(x^2-a)\cdot e^{-x}$, $a\in R$.

3.4.3 Q2 Grundkurs: Stochastik II

Zu Beginn dieses Unterrichtsabschnittes soll eine integrierende Wiederholung der Lerninhalte aus dem Lernabschnitt Stochastik I in der Einführungsphase erfolgen. Als Anwendungen werden empfohlen: klassische Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, auch Paradoxa, Lotto, Qualitätskontrolle, Zuverlässigkeit, Mendelsche Regeln, aktuelle Beispiele aus der Zeitung.

An eine systematische Behandlung der Kombinatorik ist nicht gedacht. Die erforderlichen Elemente der Kombinatorik können z. B. über Baumdiagramme eingeführt werden.

Je nach Arbeitsplanung auf der Grundlage der in den Halbjahren Q2 und Q4 zur Verfügung stehenden Unterrichtszeiten können der Erwartungswert und die Standardabweichung der Binomialverteilung auch erst in Q4 behandelt werden.

Unabhängigkeit von Ereignissen und Einführung der Bernoulli-Ketten

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Simulation eines Zufallsexperiments und Schätzung von Wahrscheinlichkeiten	Z. B. Julklapp mit dem Ereignis „Mindestens einer zieht sein eigenes Geschenk“
• Unabhängigkeit von Ereignissen / Teilexperimenten	Unabhängigkeit von Ereignissen / Teilexperimenten inhaltlich erfasst durch Gegenüberstellung geeigneter Zufallsexperimente. Prototyp: Ziehen mit und ohne Zurücklegen und die entsprechenden Baumdiagramme Die bedingte Wahrscheinlichkeit kann an dieser Stelle auch behandelt werden. Vierfeldertafel
• Bernoulli-Kette • Anzahl der Erfolge und relative Häufigkeit der Erfolge in einer Bernoulli-Kette als Beispiele für Zufallsgrößen • Verteilung der Anzahl der Erfolge in einer Bernoulli-Kette (Binomialverteilung) • Gestalt der Binomialverteilung in Abhängigkeit von n und p	Verständnis für die charakteristischen Merkmale dieses Modells durch zahlreiche Beispiele und Gegenbeispiele Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln, dabei kombinatorische Überlegungen zu $\binom{n}{k}$ Es ist nicht an eine systematische Behandlung von Zufallsgrößen gedacht. Experimentieren, beobachten und interpretieren anhand der graphischen Darstellung der Verteilungen. An dieser Stelle sollten möglichst Tabellenkalkulationsprogramme eingesetzt werden.
• Erwartungswert μ und Standardabweichung σ der Anzahl der Erfolge	Beschreibung der Gestalt der Verteilung mittels μ und σ. μ als Lageparameter und σ als Streuungsparameter der Verteilung der Zufallsgröße. Zusammenhang zu empirischen Kenngrößen $\overline{x}$ und s. Erwartungswert als Vorhersage für das arithmetische Mittel aus vielen Beobachtungen der Zufallsgröße. Die Formeln $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ können durch Verallgemeinern von Beispielen und inhaltliche Argumente ausgehend vom Fall $n=1$ gewonnen werden.

3.4.4 Q3 Grundkurs: Analytische Geometrie

Die Schülerinnen und Schüler sollen die grundlegenden Begriffe, Methoden und Verfahren der analytischen Geometrie kennen lernen und geometrische Probleme mit neuen Mitteln lösen können.

Im Mittelpunkt stehen die Erarbeitung der vektoriellen Geraden- und Ebenengleichung in verschiedenen Formen und die Untersuchung von Lagebeziehungen sowie die Berechnungen von Abständen und Winkelgrößen.

Um Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen analytisch zu klären, werden Systeme linearer Gleichungssysteme benötigt. Das Lösen auch von über- oder unterbestimmten Gleichungssystemen und die geometrische Interpretation von deren Lösungsmengen sollen geübt werden.

Die Lernabschnitte sind im Unterricht sinnvoll miteinander zu verbinden. Die angeführte Reihenfolge der Inhalte ist nicht verbindlich.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
Vektoren • ebene und räumliche Vektoren als Pfeilklassen • Operationen mit Vektoren: Addition, Bildung des Gegenvektors, Subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar	Der Klassenbegriff kann anschaulich, ohne Definition des Begriffs Äquivalenzklasse benutzt werden.
Koordinaten- / Komponentendarstellung • Kartesisches Koordinatensystem, Koordinaten- / Komponentendarstellung von Vektoren, Ortsvektoren • Betrag eines Vektors	Bei räumlichen Problemen sollen Vektoren im Schrägbild dargestellt werden. Dabei können auch schiefe Körper, z. B. Prismen oder Pyramiden betrachtet werden.
Geradengleichung • Parameterdarstellung (vektoriell in der Ebene und im Raum) • Lagebeziehungen von zwei Geraden: Parallelität, windschiefe Geraden, Schnittpunkt zweier Geraden	Eine Wiederholung von Inhalten der Koordinatengeometrie aus der Einführungsphase ist möglich. Es können auch Geradenscharen betrachtet werden.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
Ebenengleichung • Parameterdarstellung, Koordinatengleichung • Lagebeziehungen von zwei Ebenen: Parallelität, Schnittgerade • Lagebeziehungen zwischen Ebene und Gerade: Parallelität, Schnittpunkt	Es können auch Ebenenscharen betrachtet werden. Die Untersuchung der Lagebeziehung von Ebenen kann auch erst im Zusammenhang mit dem Skalarprodukt und der Normalenform einer Ebenengleichung erfolgen.
Skalarprodukt und Anwendungen • Skalarprodukt • elementargeometrische Beweise mit Hilfe des Skalarproduktes • Ebenengleichung in Normalenform • Abstandsberechnungen • Winkelberechnungen, Untersuchungen auf Orthogonalität **Kreis und Kugel** • Kreis- und Kugelgleichungen • Lagebeziehungen von Gerade und Kreis bzw. von Gerade und Kugel • Gleichungen von Tangentialebenen	Anwenden des Skalarproduktes Ausführung folgender Abstandsberechnungen: Ebene-Ebene, Ebene-Gerade, Ebene-Punkt, Gerade-Gerade und Gerade-Punkt Die Hessesche Normalenform kann, muss aber nicht für Abstandsberechnungen verwendet werden. Es sind die Schnittwinkel zweier Ebenen, zweier Geraden und einer Geraden mit einer Ebene zu berücksichtigen. Es genügt, Gleichungen für Kreise in einer Koordinatenebene zu betrachten. Die Inhalte der Koordinatengeometrie aus der Einführungsphase können wiederholt werden. Es genügt die Unterscheidung der drei Fälle zwei Schnittpunkte, ein Berührpunkt oder kein gemeinsamer Punkt. Tangentialebenen müssen nur für Fälle einfach bestimmbarer Berührpunkte betrachtet werden.

3.4.5 Q4 Grundkurs: Differential- und Integralrechnung IV

Mit der Bearbeitung von Sachproblemen und deren Modellierung ist sowohl eine Vertiefung und Erweiterung als auch eine Wiederholung bekannter Methoden der Analysis beabsichtigt. Damit erfahren die Schülerinnen und Schüler zugleich eine zeitnahe Unterstützung bei ihrer Vorbereitung auf die schriftliche Abiturprüfung.

Komplexe Aufgaben zur Analysis

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Integration von Exponentialfunktionen und von Logarithmusfunktionen • Berechnung von Flächeninhalten im Zusammenhang mit Exponential- und Logarithmusfunktionen	Stammfunktionen können vorgegeben werden, wenn sie nur mit Hilfe von Integrationsverfahren ermittelt werden können.
• Untersuchung zusammengesetzter und verketteter Funktionen unter Berücksichtigung von - ganzrationalen Funktionen - trigonometrischen Funktionen - Logarithmusfunktionen - gebrochen rationalen Funktionen - Exponentialfunktionen	Modellierungen von Problemen, die zu mathematischen Darstellungen mit Funktionen der bereits bekannten Klassen führen. Das Lösen von Sachproblemen mit komplexen funktionalen Zusammenhängen ist schematischen Funktionsuntersuchungen ohne Anwendungsbezug stets vorzuziehen.

3.4.6 Q4 Grundkurs: Stochastik III

Die Verteilung der Unterrichtsinhalte auf die Semester Q2 und Q4 kann entsprechend der in den Schulhalbjahren zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit variiert werden.

Weiterführung der Bernoulli-Ketten und ein Element der beurteilenden Statistik

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• $k\sigma$-Intervalle für Anzahl der Erfolge bei großen n, $\sqrt{n}$ -Gesetz • Vorhersagen für die Anzahl der Erfolge bei bekanntem p • signifikante Abweichungen vom erwarteten Wert	$k\sigma$-Intervalle sind fundamental für Überlegungen zum Schätzen und bereiten Testen vor. Beispiele: Anzahl der A-Wähler, Anzahl der Geburtstagskinder, Anzahl der Mädchengeburten. Häufigkeit einer Lotto-Zahl, Anzahl ausgefallener Bauelemente, Anzahl stornierter Buchungen Das 2σ-Intervall liefert ein Signifikanzniveau von rund 5%.

3.5 Leistungskurse

3.5.1 Q1 Leistungskurs: Differential- und Integralrechnung

Die angegebene Reihenfolge der Themengebiete Differential- und Integralrechnung ist nicht verbindlich. Die Fachkonferenz der Schule oder die Lehrerinnen und Lehrer müssen ein eigenes Konzept entwerfen. Soweit fachdidaktisch sinnvoll können Inhalte der Differential- und Integralrechnung auch aus Q1 und Q2 vertauscht werden. Es sollte allerdings darauf geachtet werden, dass die Theorieinhalte der Differential- und Integralrechnung in den ersten beiden Kurshalbjahren vollständig behandelt werden. Im Bereich der komplexen Aufgaben in Q 4 sollten keine wesentlichen Theorieanteile erarbeitet werden müssen. Vielmehr stehen Aufgaben im Mittelpunkt, die die bisher behandelten Bereiche sinnvoll verbinden (z. B. Extremalberechnungen in der analytischen Geometrie) und einen hohen, abiturrelevanten Grad an Komplexität erreichen.

Fachdidaktische und methodische Hinweise zur Behandlung der Differential- und Integralrechnung im Leistungskurs

Die Lernabschnitte der Qualifikationsphase aus dem Bereich der Differential- und Integralrechnung dienen insbesondere auch dem sicheren Umgang mit symbolischen und formalen Elementen der Mathematik. Die für Modellbildungen und Problemlösungen verfügbaren Kalküle und Funktionenklassen werden angemessen entwickelt und erweitert. Dazu werden die Eigenschaften allgemeiner trigonometrischer Funktionen, der Exponential- und Logarithmusfunktionen, der rationalen Funktionen und der von zusammengesetzten Funktionen vertieft betrachtet. Die Ableitungsregeln werden um die Produkt- und Quotientenregel, die allgemeine Kettenregel und die Umkehrregel ergänzt. Weiterhin wird der Grenzwertbegriff für Folgen aus dem Profilkurs aufgegriffen und für Funktionen eingeführt, in vielfältigen Situationen trainiert und um die Möglichkeit der Berechnung durch Anwendung der Regel von l'Hospital erweitert.

Die Integralrechnung dient einer allgemeineren Flächeninhaltsberechnung, sollte sich aber nicht allein auf diesen Aspekt beschränken. Das Integral sollte auch als aus Änderungen rekonstruierter Bestand aufgefasst werden können. Verschiedene Integrationsmethoden wie partielle Integration und Substitution sollen zur Verfügung gestellt werden. Es sollte aber nicht der Eindruck entstehen, dass alle Integrale elementar berechnet werden können. Der Relevanz des Integrals in den Anwendungen soll Rechnung getragen werden.

Je nach didaktischem Konzept können weitere Beweise, die nicht ausdrücklich vorgesehen sind, durchgeführt werden.

Es kommt bei der Behandlung der Differential- und Integralrechnung insbesondere auch auf eine angemessene Verzahnung der beiden Themengebiete an. Diese wird zum Beispiel durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung oder durch die Umkehrung der Ableitungsregeln zu den Regeln der partiellen Integration und der Substitution deutlich.

Das Themenfeld der Differential- und Integralrechnung bietet vielfältige Möglichkeiten zum Aufgreifen von Realitätsbezügen und zur Modellierung. Dies gilt insbesondere für die Exponential- und Logarithmusfunktionen hinsichtlich ihrer Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsprozessen, aber auch für die trigonometrischen Funktionen in Bezug auf die Beschreibung von Schwingungsvorgängen und für die rationalen Funktionen in verschiedenen Bezügen, z. B. der Linsengleichung. Funktionsuntersuchungen, die ausschließlich dazu dienen, einen Überblick über den graphischen Verlauf eines Funktionsgraphen zu gewinnen, können zwar weiterhin als Übungsfeld dienen, sollen aber nicht vor der Behandlung realitätsnaher Probleme stehen.

Traditionell ist der Analysisunterricht von vielfältigen innermathematischen Zwängen belegt. So wird vom mathematischen Standpunkt aus eine Behandlung des Integralbegriffs nicht vor einer eingehenden Behandlung des Konvergenzbegriffs stehen. Dies ist aber nur eine Sichtweise von Mathematik, die im schulischen Unterricht zwar weiterhin Bestand, aber nicht die einzige Möglichkeit der sinnvollen und aktiven Auseinandersetzung mit Mathematik ist. So haben auch problemhaltige Zugänge, die den geradlinigen Stoffaufbau aufheben, ihre Berechtigung.

Die Behandlung der verbindlich genannten Inhalte hat wegen der Bedeutung für die zentrale Abiturprüfung auf jeden Fall Vorrang vor einseitigen Vertiefungen.

Differentialrechnung II

Lerninhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Definition des Funktionsgrenzwertes für $x \to x_0$ und für $x \to \pm\infty$	Die Definition ist auf die Konvergenz von Folgen zurückzuführen.
• Grenzwertuntersuchungen einschließlich der Betrachtung links- und rechtsseitiger Grenzwerte	Es sollen Funktionsterme behandelt werden wie z. B.: $\frac{x^2-1}{x+1}$, $\frac{\sin(x)}{x}$, $\frac{\lvert x \rvert}{x}$, $\frac{\cos(x)-1}{x}$. Die Klasse der oszillierende Funktionen mit z. B. $f(x)=\begin{cases} x^n \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{\textit{für} } x = 0 \end{cases}$ kann durchgängig als Beispielmaterial verwendet werden.
• Verknüpfung von Funktionen, Verkettung • Grenzwertsatz für Funktionen • Definition der Stetigkeit an einer Stelle x_0, Stetigkeitsnachweise für Stetigkeit an einer Stelle • Sätze über Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen • Stetige Fortsetzbarkeit • Stetigkeit auf abgeschlossenen Intervallen: Nullstellensatz, Zwischenwertsatz, Satz vom Maximum	Die bisherigen Verknüpfungen von Funktionen sind bewusst zu machen und um die Verkettung zu erweitern. Die Grenzwertsätze für Folgen sind auf die von Funktionen zu übertragen. Für eine Verknüpfungsart soll der Beweis geführt werden. Die Folgendefinition der Stetigkeit ist zu behandeln. Eine $\varepsilon-\delta-$Definition der Stetigkeit muss nicht thematisiert werden. Die Vollständigkeit der reellen Zahlen ist geeignet zu präzisieren. Es müssen nicht alle Sätze bewiesen werden.
• Vertiefung des Ableitungsbegriffs	Es sollen exemplarisch Untersuchungen der Differenzierbarkeit an einer Stelle auch unter Berücksichtigung von links- und rechtsseitiger Ableitung durchgeführt werden. Es sollen auch nicht triviale Beispiele für nicht differenzierbare Funktionen behandelt werden.

Lerninhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit • Produkt- und Quotientenregel, Kettenregel • Satz von Rolle, 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung	Es sollen auch Gegenbeispiele betrachtet werden. Es sollen Funktionen und zusammengesetzte Funktionen aus den folgenden Funktionsklassen abgeleitet werden können: ganzrationale Funktionen, einfache gebrochen rationale und beliebige trigonometrische Funktionen sowie Zusammensetzungen aus diesen Funktionenklassen. Es müssen nicht alle Sätze und Regeln bewiesen werden.
• Monotoniekriterien • Notwendige und hinreichende Kriterien für relative Extremalstellen und für Wendestellen • Extremalprobleme • Funktionsuntersuchungen ohne und mit Scharparametern	Die Monotoniekriterien sind exemplarisch mit Hilfe des Mittelwertsatzes zu begründen. Anwenden und Vertiefen der aus der Einführungsphase bekannten Kriterien Die Extremalprobleme sollten auf ganzrationale, einfache gebrochen rationale und trigonometrische Zielfunktionen oder aus diesen Funktionsklassen zusammengesetzte Zielfunktionen führen. Die Definitionsbereichs- und Randwertproblematik ist mit einzubeziehen. Untersuchungen sind nur an wenigen Beispielen der genannten Funktionen und nur unter ausgewählten Aspekten zu behandeln.

Integralrechnung I

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Streifenmethode; Zerlegungssummen, insbesondere Ober- und Untersummen • Flächeninhalt als Grenzwert von Ober- und Untersummen; Fehlerbetrachtungen • Definition des bestimmten Integrals für stetige Randfunktionen	Als Randfunktionen kommen Potenzfunktionen oder einfache ganzrationale Funktionen in Betracht, z. B. f: $x \mapsto x^2$, f: $x \mapsto x^3$, f: $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 1$. Ein Beispiel einer nicht äquidistanten Zerlegung des Intervalls sollte behandelt werden. Eine geeignete Definition des bestimmten Integrals ist abhängig vom fachdidaktischen Aufbau. Demnach stellt die Reihenfolge im Rahmenlehrplan keinen Hinweis auf eine Reihenfolge der Behandlung im Unterricht dar. Wohldefiniertheit soll nicht thematisiert werden.
• Unterschied zwischen Integral und Flächeninhalt • Eigenschaften des bestimmten Integrals: Linearität , Additivität, Intervalladditivität	

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Stammfunktionen, unbestimmtes Integral • Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine additive Konstante: $F(x) - G(x) = \text{konstant}$	
• Integralfunktionen	Zur Vorbereitung können je nach fachdidaktischem Aufbau zunächst auch Flächeninhaltsfunktionen betrachtet werden.
• Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$	Auch im Leistungskurs muss der Beweis nicht mit allen Fallunterscheidungen behandelt werden.
• Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Stammfunktionen: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	Es sollte ein Gegenbeispiel behandelt werden, das die Notwendigkeit der beiden Voraussetzungen Integrierbarkeit und Existenz einer Stammfunktion erkennbar werden lässt.
• Berechnung von Flächeninhalten • Berechnung von Flächeninhalten von Flächen zwischen Funktionsgraphen	
• Rekonstruktionen als Anwendungen der Integralrechnung, auch nicht geometrische Anwendungen	Für Rekonstruktionen können z. B. die physikalischen Begriffe der Arbeit, des Weges, der elektrischen Ladung oder das Volumen behandelt werden.

3.5.2 Q2 Leistungskurs: Differential- und Integralrechnung

Der thematische Übergang von Q1 nach Q2 kann gemäß der eigenen Unterrichtsplanung unabhängig von dem dargestellten Übergang gestaltet werden.

Differentialrechnung III

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Geschwindigkeit und Beschleunigung von Wachstum und Zerfall	Es sollen Wachstums- bzw. Zerfallsprobleme aus verschiedenen Anwendungsbereichen behandelt werden und das exponentielle Wachstum mit dem linearen Wachstum verglichen werden.
• Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitungsfunktion; die Eulersche Zahl e	Eine Wiederholung der Exponentialfunktionen f der Form $f(x) = c \cdot a^x$ und ihrer Eigenschaften ist möglich. Der Bedeutung der Zahl e für Logarithmus- und Exponentialfunktionen soll Rechnung getragen werden..

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Umkehrfunktionen und ihre Ableitung, Umkehrregel : $\bar{f}'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ • Ableitung der Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten, Wurzelfunktionen • Die natürliche Logarithmusfunktion, Ableitung der Logarithmusfunktion • Berechnung von Grenzwerten mit der Regel von de l'Hospital	Der Begriff der Umkehrbarkeit und der Umkehrfunktion kann wiederholt werden. Die Arkusfunktionen können behandelt und die Umkehrregel zur Bestimmung der Ableitungsfunktionen verwendet werden. Es sind die maximalen Definitionsmengen zu bestimmen und es ist auf einseitige Differenzierbarkeit an den Rändern zu untersuchen . Der Fall "$\frac{0}{0}$" kann hier oder bereits in Zusammenhang mit dem Mittelwertsatz behandelt werden. Hier sind auch die Fälle $x \to \pm\infty$ und Grenzwerte der Form "$\frac{\infty}{\infty}$" zu betrachten.
• Anwendungen zur Exponential- und Logarithmusfunktion	Es sind kontextbezogene inner- und außermathematische Anwendungen zu behandeln. Dabei sollen die Aufgaben bereits einen hohen Komplexitätsgrad erreichen und im außermathematischen Kontext Modellierungsmöglichkeiten bieten.
• Gebrochen rationale Funktionen und ihre Eigenschaften • Untersuchung von zusammengesetzten Funktionen • Untersuchung von Funktionenscharen	Es genügt, die grundlegenden Eigenschaften (maximale Definitionsmenge, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Verhalten an den Definitionslücken und im Unendlichen) an wenigen Beispielen zu betrachten. Die bisher behandelten Funktionstypen sind geeignet zu verbinden, z. B. kommen in Betracht: $f(x) = x^3 \cdot e^{-x^2}$, $f(x) = x^2 \cdot (\ln\|x\|)^2$. Bei Funktionenscharen müssen die Fallunterscheidungen einen Schwierigkeitsgrad wie z. B. bei den Scharen f_t mit $f_t(x) = \frac{16\,(x-t)}{(1+x)^2}, t \in R$, f_a mit $f_a(x) = \ln(x^2 - a), a \in R$ oder f_t mit $f_t(x) = (x^2 + t) \cdot e^{-x}$ $, t \in R$ nicht übersteigen.
• Extremwertaufgaben • Differentialgleichungen des natürlichen, des beschränkten und des logistischen Wachstums	Zielfunktionen können alle bisher behandelten Funktionstypen und ihre Zusammensetzungen sein. Auf die Definitionsmengen- und Randwertproblematik ist einzugehen.

Integralrechnung II

Die Verteilung der Unterrichtsinhalte auf die zwei Abschnitte Integralrechnung II.1 und II.2 muss nur bei der Durchführung jahrgangsübergreifender Kurse beachtet werden, damit gewährleistet ist, dass die Integrationsverfahren partielle Integration und Integration durch Substitution sowie uneigentliche Integrale für die schriftliche Prüfung im Abitur verfügbar sind.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
Integralrechnung II.1 • Partielle Integration • Integration durch Substitution • Uneigentliche Integrale über unbeschränktem Definitionsbereich und über unbeschränkten Funktionen	Beide Integrationsregeln sollten aus der Umkehrung der entsprechenden Differentiationsregel entwickelt werden.
Integralrechnung II.2 • Rotationskörpervolumen bei Drehung um die Abszissenachse • Logarithmische Integration: $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}dx = [\ln\lvert f(x)\rvert]_a^b$	Die Berechnung von Volumina von Rotationskörpern soll auch in kontextbezogenen Aufgaben angewendet werden.
• Integration gebrochen rationaler Funktionen; Partialbruchzerlegung • Näherungsweise Berechnung von Integralen	Das Verfahren der Integration durch Partialbruchzerlegung muss für Fälle behandelt werden, in denen reelle Nullstellen im Nenner existieren. Aus den Verfahren Sehnentrapezregel, Tangententrapezregel, Simpsonsche Regel oder Keplersche Fassregel ist eine Auswahl zu treffen. CAS können verwendet werden.

3.5.3 Q2 Leistungskurs: Stochastik II

Zu Beginn dieses Unterrichtsabschnittes kann eine integrierende Wiederholung von Lerninhalten der Stochastik aus der Einführungsphase erfolgen. Als Anwendungen werden empfohlen: klassische Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, auch Paradoxa, Lotto, Qualitätskontrolle, Zuverlässigkeit, Mendelsche Regeln, aktuelle Beispiele aus der Zeitung.

An eine systematische Behandlung der Kombinatorik ist nicht gedacht. Die erforderlichen Elemente der Kombinatorik können z. B. über Baumdiagramme entwickelt werden.

Je nach den in den Semestern Q2 und Q4 zur Verfügung stehenden Unterrichtszeiten können der Erwartungswert und die Standardabweichung der Binomialverteilung auch erst in Q4 bearbeitet werden.

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Inhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Simulation eines Zufallsexperiments und Schätzung von Wahrscheinlichkeiten	Z. B. Julklapp mit dem Ereignis: „Mindestens einer zieht sein eigenes Geschenk“
• Bedingte Wahrscheinlichkeit und Multiplikationsformel, • Vierfeldertafel	Bedingte Wahrscheinlichkeit als Modellierungskonzept Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm als bedingte Wahrscheinlichkeiten Pfadregel als Spezialfall der allgemeinen Multiplikationsformel Bei der Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten kann auf die Bayessche Formel und die Problematik der A-priori- und A-Posteriori-Wahrscheinlichkeiten eingegangen werden.
• Unabhängigkeit von zwei Ereignissen • Produktregel für unabhängige Ereignisse • Unabhängigkeit in der Vierfeldertafel	Unabhängigkeit mit Hilfe der bedingten Wahrscheinlichkeit Hinweis auf die Gültigkeit der Produktregel bei Unabhängigkeit von n Ereignissen Unabhängigkeit als Modellierungskonzept Prototyp: Ziehen mit und ohne Zurücklegen und die entsprechenden Baumdiagramme Empfohlene Anwendungen: Zuverlässigkeit, Mendelsche Regeln, aktuelle Beispiele aus der Zeitung

Zufallsgrößen

Inhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• diskrete Zufallsgröße und ihre Wahrscheinlichkeits-verteilung (kurz: Verteilung)	
• Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen	Bezug zu den empirischen Kenngrößen $\overline{x}$ und s
• Linearität des Erwartungswertes und Eigenschaft der Varianz $Var(aX+b)=a^2Var(X)$	Erwartungswert als Vorhersage für das arithmetische Mittel aus vielen Beobachtungen der Zufallsgröße
• faire Spiele	Verwendung des Erwartungswertes zur Beurteilung von Spielen und wirtschaftlichen Sachverhalten, Deutung dieses Kriteriums

Bernoulli-Ketten und Binomialverteilung

Inhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Bernoulli-Ketten	Verständnis für die charakteristischen Merkmale dieses Modells durch zahlreiche Beispiele und Gegenbeispiele Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Produktregel für unabhängige Ereignisse, dabei kombinatorische Überlegungen zu $\binom{n}{k}$
• Anzahl der Erfolge und relative Häufigkeit der Erfolge in einer Bernoulli-Kette als Beispiele für Zufallsgrößen • Verteilung der Anzahl der Erfolge in einer Bernoulli-Kette (Binomialverteilung) • Erwartungswert $\mu = np$ und Standardabweichung $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ der Anzahl der Erfolge in einer Bernoulli-Kette.	Es wird die Herleitung des Erwartungswertes mit Hilfe der Summendarstellung der Anzahl der Erfolge empfohlen. Die Varianz kann ohne Herleitung verwendet werden. Beschreibung der Gestalt der Verteilung mittels μ und σ μ als Kenngrößen der Lage und σ als Kenngröße der Streuung der Verteilung der Zufallsgröße Experimentieren, beobachten und interpretieren anhand der graphischen Darstellung der Verteilungen An dieser Stelle sollten möglichst Tabellenkalkulationsprogramme zur Visualisierung verwendet werden. Empfohlene Anwendungen: Spiele, Gruppenprüfung auf eine Krankheit

3.5.4 Q3 Leistungskurs: Analytische Geometrie und Lineare Algebra

Ausgehend vom Vektorbegriff im Fundamentum kann der Unterricht zwei Strängen folgen:

A1: vektorielle analytische Geometrie

A2: Anwendung von Matrizen bei Abbildungen.

Beiden Wahlgebieten gemeinsam ist ein Grundbestand an algebraischen und geometrischen Inhalten und Verfahren. Unterschiedlich sind die Schwerpunkte. Eines der Gebiete muss im Rahmen des Kurses vollständig behandelt werden. Darüber hinaus können weitere Themen behandelt werden.

Zu dem beiden Gebieten gemeinsamen Fundamentum gehören das Aufstellen und Lösen von Systemen linearer Gleichungen und das Arbeiten mit Vektoren.

Lineare Gleichungssysteme sind in vielen Bereichen von Wissenschaft, Wirtschaft und Gesellschaft ein unentbehrliches Mittel zur mathematischen Bewältigung von Sachproblemen; auch viele mathematische Fragestellungen führen zu linearen Gleichungssystemen. Der Schwerpunkt des Unterrichts liegt auf Anwendungsaufgaben. Das Aufstellen eines dem Sachproblem angemessenen Gleichungssystems und die Interpretation der Lösung sind mindestens ebenso wichtig wie die Durchführung eines Lösungsverfahrens.

Fundamentum

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
Vektoren	
• Ebene und räumliche Vektoren als Pfeilklassen	Der Klassenbegriff kann anschaulich, ohne Definition des Begriffs Äquivalenzklasse benutzt werden.
• Operationen mit Vektoren: Addition, Bildung des Gegenvektors, Subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar	Die Eigenschaften der Operationen bieten die Möglichkeit, den Vektorraum zu definieren.
• Linearkombination von Vektoren	Der Begriff Basis kann hier eingeführt werden.
• Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit	
Koordinaten- / Komponentendarstellung	
• Kartesisches Koordinatensystem, Koordinaten- / Komponentendarstellung von Vektoren, Ortsvektoren • Betrag eines Vektors	Bei räumlichen Problemen sollen Vektoren im Schrägbild dargestellt werden. Dabei können auch schiefe Körper wie Prismen und Pyramiden betrachtet werden.
Systeme linearer Gleichungen	Auswahl und Anwendung geeigneter Verfahren
• Gauß-Algorithmus	Das Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme kann anhand von Sachaufgaben, aber auch wiederholend aus der Analysis zum Bestimmen eines Funktionsterms aus vorgegebenen Eigenschaften behandelt werden.
• Fragen der Lösbarkeit von linearen Gleichungs-systemen	Im Rahmen der gewählten Alternative kann die Behandlung auch dann erfolgen, wenn das Lösen von Gleichungssystemen inhaltlich erforderlich wird, z. B. in A1 bei der Untersuchung von Lagebeziehungen oder in A2 mit der Einführung von Matrizen.
• (m,n)-Systeme	Es können auch CAS eingesetzt werden. Die Behandlung des Gauß-Algorithmus ist im Hinblick auf den Einsatz eines programmierbaren Verfahrens sinnvoll.
	Schwerpunkt sind Systeme mit drei Gleichungen und drei Variablen. Eine Festlegung auf ein Verfahren, etwa den Gauß-Algorithmus, ist nicht beabsichtigt.
	Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssystems können als Beispiele für Vektorräume dienen.

Alternative A1: Vektorielle analytische Geometrie

Im Mittelpunkt dieses Wahlgebietes A1 stehen die Erarbeitung der vektoriellen Geraden-, Ebenen-, Kreis- und Kugelgleichungen und die Untersuchung von Lagebeziehungen. Das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler kann durch Darstellungen von Geraden und Ebenen gefördert werden.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
Geradengleichung • Parameterdarstellung (vektoriell in der Ebene und im Raum) • Lagebeziehungen von Geraden im Raum: parallele Geraden, windschiefe Geraden, Schnittpunkt zweier Geraden • Geradenscharen	Inhalte der Koordinatengeometrie aus der Einführungsphase können wiederholt werden.
Ebenengleichung • Parameterdarstellung, Koordinatengleichung • Lagebeziehungen von zwei Ebenen: Parallelität, Schnittgerade • Lagebeziehungen zwischen Ebene und Gerade, Parallelität, Schnittpunkt • Ebenenscharen	Die Verwendung der Koordinatengleichung und die Untersuchung der Lagebeziehungen von Ebene und Ebene oder Ebene und Gerade können auch erst im Zusammenhang mit dem Skalarprodukt und der Normalenform einer Ebenengleichung erfolgen. Dies beinhaltet, die vom Lösen linearer Gleichungssysteme bekannten Fälle genau einer Lösung, keiner Lösung oder „unendlich vieler“ Lösungen geometrisch zu interpretieren.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
Skalarprodukt und Anwendungen	
• elementargeometrische Beweise mit Hilfe des Skalarproduktes	Anwenden des Skalarproduktes z. B. auf Arbeit in der Physik.
• Ebenengleichung in Normalenform	Berechnung folgender Abstände: Ebene-Ebene, Ebene-Gerade, Ebene-Punkt, Gerade-Gerade und Gerade-Punkt. Die Hessesche Normalenform kann, muss aber nicht für Abstandsberechnungen verwendet werden.
• Abstandsberechnungen	
• Winkelberechnungen, Untersuchungen auf Orthogonalität	Es sind die Schnittwinkel zweier Ebenen, zweier Geraden und einer Geraden mit einer Ebene zu berücksichtigen.
Vektor- und Spatprodukt	
• Eigenschaften	
• Flächeninhalts- und Volumenberechungen	Anwenden auf die Bestimmung der Flächeninhalte von Parallelogrammen und Dreiecken sowie der Volumina von Pyramide und Spat
Kreis und Kugel	
• Kreis- und Kugelgleichungen	Es genügt, Gleichungen für Kreise in einer Koordinatenebene zu betrachten.
• Lagebeziehungen von Gerade und Kreis oder Kugel	
• Gleichungen von Tangentialebenen	

Alternative A2: Anwendung von Matrizen bei Abbildungen

Schwerpunkt dieses Wahlgebietes A2 sind geometrische Abbildungen. In der Sekundarstufe I behandelte Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen können vom analytischen Standpunkt vertieft werden. Zusätzlich sollen die affinen Abbildungen Dehnung und Scherung behandelt werden.

Die geometrischen Abbildungen werden hier mit Hilfe von Vektoren und Matrizen beschrieben. Eine Einführung des Arbeitens mit Matrizen ist für die Schüler auch deshalb nützlich, weil Matrizen in vielen Berufszweigen und angewandten Wissenschaften zur Modellierung und Lösung von Sachproblemen genutzt werden.

Zur Arbeit mit Matrizen eignet sich in besonderem Maße der Computer-Einsatz.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Beschreibung von elementaren Abbildungen der Ebene mit Hilfe von Vektoren und Matrizen • Produkt eines Vektors mit einer Matrix	Im Mittelpunkt stehen Spiegelung an Parallelen zur y-Achse, Spiegelung an Ursprungsgeraden, Mehrfachspiegelungen, Drehung, Verschiebung, zentrische Streckung und Scherung. In diesem Zusammenhang soll das Produkt eines Vektors mit einer Matrix eingeführt werden.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Beschreibung von elementaren Abbildungen der Ebene mit Hilfe von Vektoren und Matrizen • Produkt eines Vektors mit einer Matrix • Produkt zweier Matrizen, Potenzen von Matrizen • Inverse Matrix • Allgemeine Matrix-Vektorgleichung einer affinen Abbildung	Berechnung von Bildpunkten bei einer vorgegebenen Abbildung, Verkettung von Abbildungen Bei einem Einsatz von CAS können auch Abbildungen im Raum behandelt werden und sich auf 3,3-Matrizen und die Vernetzung zur Computergrafik beziehen. Bestimmung der Umkehrabbildung zu einer vorgegebenen Abbildung Geometrische Interpretation der Tatsache, dass bei Abbildungen der Form $\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x}$ die Spalten der Abbildungsmatrix A die Bilder der Einheitsvektoren einer Basis sind.
• Steuerung von Produktionsprozessen	Anwenden auf die Gestaltung von Produktionsabläufen

3.5.5 Q4 Leistungskurs: Stochastik III

Weiterführung der Bernoulli-Ketten und ein Element der beurteilenden Statistik

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• kσ -Intervalle für Anzahl der Erfolge bei großen n, $\sqrt{n}$ -Gesetz • Vorhersagen für die Anzahl der Erfolge bei bekanntem p • signifikante Abweichungen vom erwarteten Wert	kσ -Intervalle sind fundamental für Überlegungen zum Schätzen und bereiten Testen vor. Sicherheitswahrscheinlichkeiten werden mit Hilfe von Tabellen oder Tabellenkalkulationsprogrammen gefunden. Empfohlene Anwendungen: Anzahl der A-Wähler, Anzahl der Geburtstagskinder, Anzahl der Mädchengeburten, Häufigkeit einer Lotto-Zahl, Anzahl ausgefallener Bauelemente, Anzahl stornierter Buchungen Das 2σ -Intervall liefert ein Signifikanzniveau von rund 5%.

3.5.6 Q4 Leistungskurs: Komplexe Aufgaben

Mit mathematischer Modellierung und Problemlösung ist sowohl eine Anwendung und Vertiefung als auch eine Wiederholung bereits bekannter Methoden der Analysis beabsichtigt. Problemstellungen aus der analytischen Geometrie oder der linearen Algebra können berücksichtigt werden. Damit erfolgt zugleich eine zeitnahe Unterstützung der Schülerinnen und Schüler bei ihrer Vorbereitung auf die schriftliche Prüfung im Abitur.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Modellieren von Problemen, die zu mathematischen Darstellungen mit Funktionen der bereits bekannten Klassen führen	Anwenden der Methoden der Differential- und Integralrechnung
• Untersuchung zusammengesetzter und verketteter Funktionen unter ausgewählten Aspekten • Schnitt von Scharkurven, Ortskurven	Das Lösen von Sachproblemen mit komplexen funktionalen Zusammenhängen ist Funktionsuntersuchungen ohne Anwendungsbezug stets vorzuziehen.

3.5.7 Q4 Leistungskurs: Stochastik IV

In diesem Lernabschnitt kann wahlweise eines oder zwei der folgenden drei Themen oder ein freies Projekt bearbeitet werden.

Normalverteilung

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Von der Binomialverteilung zur Normalverteilung; Hinführen zur Problematik einer stetigen Zufallsgröße	Die 3 Transformationen einer Binomialverteilung (der Säulen des Histogramms): Verschiebung des Erwartungswertes, Stauchung der (Säulen-) Breiten, Streckung der (Säulen-) Höhen können durch graphische Plausibilitätsbetrachtungen an einem konkreten Beispiel durchgeführt werden.
• Normalverteilung mit σ und σ^2 als Beispiel einer Verteilung einer stetigen Zufallsgröße, Anpassen einer Normalverteilung an ein Histogramm • Erwartungswert und Varianz einer normalverteilten Zufallsgröße und Standardisieren einer normalverteilten	Empfohlene Anwendungen: Messgrößen (Körpergröße, Gewicht, Temperatur) Deutung der Parameter μ und σ^2 durch Bezug zu $\overline{x}$ und s Die Parameter werden in Analogie zum diskreten Fall Erwartungswert und Varianz genannt. Eine allgemeine Definition im stetigen Fall muss nicht erfolgen. Das Standardisieren kann inhaltlich aus der Bedeutung der Parameter begründet werden, an eine rechnerische Herleitung ist nicht gedacht.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Zufallsgröße • kσ -Intervalle für eine normalverteilte Zufallsgröße • signifikante Abweichungen vom erwarteten Wert • Anwendungen zur Normalverteilung, z. B. Messgrößen, Aktienrenditen	Mit Hilfe der kσ -Intervalle soll ein inhaltliches Verständnis für den Begriff signifikante Abweichung erzielt werden.

Schätzen einer unbekannten Wahrscheinlichkeit p

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Verteilung der relativen Häufigkeit	Relative Häufigkeit als Schätzgröße ist eine Zufallsgröße. Verteilung abgeleitet aus der Verteilung der Anzahl der Erfolge Graphische Darstellung nach Klasseneinteilung zeigt „Zusammenziehen“ auf Wahrscheinlichkeit p.
• $k\sigma / n$-Intervalle für relative Häufigkeit bei großen n, $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz	Abgeleitet aus kσ -Intervallen für Anzahl der Erfolge Insbesondere $k = 2$: $k\frac{\sigma}{n} = 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$
• Güte einer Schätzung auf der Basis der $k\sigma / n$-Intervalle	Auf 95%-Niveau Genauigkeit mindestens $\frac{1}{\sqrt{n}}$
• Ausreichender Umfang einer Stichprobe bei rund 95%-Niveau und gegebener Genauigkeit	Erfahrung, dass relative Häufigkeit ohne Angabe des Stichprobenumfangs nur beschränkten Informationsgehalt besitzt. Empfohlene Anwendungen z. B.: Wahlhochrechnungen, Meinungsumfragen, Beispiele aus der Zeitung

Hypothesentest über eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Testproblem: Entscheidung zwischen alternativen Modellen aufgrund einer Stichprobe • Annahmebereich • Signifikanzniveau • Fehler 1. und 2. Art	Bei zweiseitigem Test sind kσ -Intervalle als Annahmebereiche motiviert für entsprechende Signifikanzniveaus. Ein einseitiger Test zur Vertiefung Bei Testkonstruktion ist auch Approximation durch Normalverteilung möglich. Konkurrenz der beiden Fehler anhand der graphischen Darstellung verdeutlicht durch Betrachtung einer beliebigen Verteilung der Alternative

3.6 Zusatzkurse

Zusatzkurse sind Ergänzungsgrundkurse oder Erweiterungsgrundkurse, die von Schülerinnen und Schülern der Leistungskurse und von interessierten Schülerinnen und Schülern aus den Grundkursen besucht werden können. Es dürfen von einem Schüler insgesamt maximal zwei Zusatzkurse in die Gesamtqualifikation eingebracht werden. Ist Mathematik nicht Prüfungsfach, so darf in Mathematik nur ein Zusatzkurs eingebracht werden.

Zusatzkurse bieten andere Themen als in den Grund- und Leistungskursen. Für die Teilnahme an einigen Zusatzkursen sind Inhalte von bestimmten Grund- oder Leistungskursen Voraussetzung. Diese Zusatzkurse dürfen nicht vor dem Besuch der entsprechenden Grund- oder Leistungskurse belegt werden. Geringe Kenntnisunterschiede können im Verlauf des Unterrichts ausgeglichen werden.

Für die Zusatzkurse sind die Unterrichtsinhalte so global angegeben, dass zusätzlich zu dem didaktischen Freiraum auch ein großer inhaltlicher Gestaltungsspielraum gegeben und durch eigene Konzeptionen auszufüllen ist.

Zusätzlich zu den aufgeführten Zusatzkursen kann die Fachkonferenz der Schule eigene inhaltliche Konzepte entwickeln. Diese sind der Fachaufsicht vorab zur Kenntnis zu geben.

Kurs maE-1: Inzidenzgeometrie

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Axiomensystem über die Inzidenz von Punkten und Geraden • Geometrische und isomorphe algebraische Modelle • Unabhängigkeit, Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit	

Kurs maE-2: Nichteuklidische Geometrie

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Hyperbolische Geometrie • Modell der hyperbolische Geometrie • Konstruktionsaufgaben	

Kurs maE-3: Logik

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Aussagen- und Prädikatenlogik • Quantoren, Verknüpfungen bei Aussageformen, Mengendiagramme • Logische Schlussformen	

Kurs maE-4: Zahlentheorie

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Kongruenzen, Restklassen, Teilbarkeit • Fermatscher Satz und Satz von Euler • Perioden bei rationalen Zahlen	

Kurs maE-5: Numerische Mathematik

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Interpolation von Funktionen • Approximation nach Tschebyschew • Methode der kleinsten Quadrate • Iterative Lösung eines linearen Gleichungssystems • Differenzgleichungen	Entwicklung von Verfahren und Methoden der numerischen Mathematik, Erprobung und Interpretation Es sollen mehrere verschiedene Verfahren behandelt werden.

Kurs maE-6: Differentialgleichungen

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung • Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung • Weitere spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung	

Kurs maE-7: Unendliche Reihen

Dieser Kurs setzt Kenntnisse aus dem Profilkurs des zweiten Halbjahres der Einführungsphase oder entsprechende Kenntnisse aus den Leistungskursen aus den Halbjahren Q1 und Q2 voraus.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Konvergente und divergente Reihen, Konvergenzkriterien, Cauchy-Kriterium • Potenzreihen • Taylor-Reihen	

Kurs maE-8: Markowketten

Der Kurs kann erst nach der Behandlung der Stochastik II in Q2 besucht werden.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Homogene Markowketten • Zustände und Übergangswahrscheinlichkeiten, Irrfahrtmodelle • Grenzwahrscheinlichkeiten	

Kurs maE-9: Elemente der Funktionentheorie

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Komplexe Zahlen, Gaußsche Zahlenebene, Polarkoordinaten • Lineare und einfache nicht lineare Funktionen, Stetigkeit und Differenzierbarkeit • Kreisbewegungen und Schwingungen	

Kurs maE-10: Pathologien in der Analysis

In diesem Kurs kann interessierten Schülerinnen und Schülern Gelegenheit gegeben werden, Gegenbeispiele für die Nicht-Umkehrbarkeit von Sätzen oder Beispiele für die Unverzichtbarkeit von Voraussetzungen in Sätzen in einer mathematischen Tiefe zu untersuchen, die aufgrund der Komplexität der zu betrachtenden Funktionen im Rahmen der regulären Unterrichtszeit nicht möglich ist.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Monotonie und Beschränktheit • Stetigkeit und Differenzierbarkeit • Integrierbarkeit	Es können lokale und globale Eigenschaften von Funktionen untersucht werden, bei denen die vertrauten Kriterien nicht unmittelbar anwendbar sind. Es können z. B. auch betrachtet werden: Funktionen, die nirgends lokal beschränkt sind, Funktionen, die stetig und nirgends monoton sind, Funktionen die stetig und nirgends differenzierbar sind, periodische Funktionen, deren Summe nicht periodisch ist, Funktionen, deren Ableitungsfunktionen nicht integrierbar sind.

Kurs maE-11: Einführung in die mehrdimensionale Differential- und Integralrechnung

Für die Teilnahme an diesem Kurs sind Kenntnisse aus den Leistungskursen oder gute Kenntnisse aus den Grundkursen der Qualifikationsphase Q1 und Q2 Voraussetzung.

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Kurven und Flächen im dreidimensionalen Raum	Analytische Darstellung von Kurven und Flächen in kartesischen Koordinaten, Zylinder- und Polarkoordinaten, zeichnerische Darstellung von Flächen durch ihre Höhenlinien mit der Gleichung $z = f(x, y) = kons\tan t$
• Partielle Ableitungen, totales Differential, Gradient	Mögliche Anwendungen sind das Wandern auf einer Fläche entlang einer vorgegebenen Kurve $y = \Gamma(x)$, das Problem des Höhenunterschieds beim Wandern, das Problem des steilsten Anstiegs an einer Stelle und die Berechnung von Kräften im Potentialfeld, lokale Extrema und Extrema mit Nebenbedingungen.
• Linienintegral, Flächenintegral, Volumenintegral	Mögliche Anwendungen sind das Volumen unterhalb eines Flächenstückes, der magnetische Fluss als Integral der Flussdichte, die Masse als Integral der Dichte und die Berechnung von Trägheitsmomenten

Kurs maE-12: Kegelschnitte in der analytischen Geometrie

Unterrichtsinhalte	Kompetenzen, Erläuterungen und Anregungen
• Doppelkegel in vektorieller Darstellung • Schnitt eines Doppelkegels mit einer Koordinatenebene • Dandelinsche Kugeln	

4 Leistungsbewertung

4.1 Grundsätze

Die Lehrerinnen und Lehrer müssen unter Beachtung der jeweils geltenden Rechtsverordnungen klare und nachvollziehbare Kriterien für die Beurteilungen von Schülerinnen und Schülern entwickeln. Diese Bewertungskriterien sind den Schülerinnen und Schülern zu Beginn eines Schulhalbjahres mitzuteilen und zu erläutern.

Beurteilungskriterien in der gymnasialen Oberstufe im Fach Mathematik sind die Beteiligungen am Unterrichtsgeschehen und an den Unterrichtsgesprächen sowie die Klausurarbeiten. Darüber hinaus können benotete schriftliche Lernerfolgskontrollen, schriftliche oder mündliche Hausaufgabenkontrollen, unterrichtsimmanente Hausaufgabenkontrollen, Prüfungsgespräche, Lerntagebücher, Portfolios und Schülerreferate sowie z. B. eine Beteiligung an Projekten, an Lernen durch Lehren oder an Rollenspielen bei der Beurteilung berücksichtigt werden.

Die schriftlichen Leistungsüberprüfungen bilden insbesondere auch im Hinblick auf die zentralen Abiturprüfungen neben der Unterrichtsbeteiligung einen wesentlichen Beurteilungsaspekt.

4.2 Die Mitarbeit im Unterricht

- Die Mitarbeit während des Unterrichts und die Beteiligung am Unterrichtsgespräch haben einen unvermindert hohen Stellenwert. Eine schriftliche und mündliche Mitarbeit sowie die Qualität der Beiträge in Inhalt und Argumentation sind entscheidend.

  Im Leistungs- und auch im Grundkurs ist der Grad der Exaktheit in der Verwendung der Fachsprache angemessen zu berücksichtigen.

  Um die Mitarbeit der Schülerinnen und Schüler nicht zu hemmen, sollen die Lernsituationen während des Unterrichts nicht den Charakter irreversibler Leistungssituationen annehmen. In Erarbeitungsphasen, insbesondere in Brainstorming- , Vermutungs- oder Sammlungsphasen, und auch in Übungs- oder Sicherungsphasen muss eine von kurzfristigem Zensurendruck unbeschwerte Teilnahme am Unterricht ermöglicht werden. Die für die Bewertung einer Schülerin oder eines Schülers günstigen schriftlichen oder mündlichen Beiträge sind grundsätzlich zu berücksichtigen. Durch offene Aufgaben und Problemstellungen und deren selbständige Bearbeitung, in denen Schülerinnen und Schüler in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit Lösungswege diskutieren und zu Ergebnissen gelangen, ergeben sich Beobachtungen selbständiger Schülerarbeit, die bei der Bewertung berücksichtigt werden müssen. Über die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen hinaus sollten auch die Personalkompetenzen, Kommunikations- und Sozialkompetenzen, in die Beurteilung einfließen.

  Maßgebend für die Bewertung am Ende eines Schulhalbjahres ist der erreichte Entwicklungsstand der Kenntnisse und Kompetenzen unter Berücksichtigung der Lernentwicklung.

- Unterrichtsbezogene Kontrollen von Hausaufgaben finden innerhalb des Unterrichtsgespräches oder in Einzelberatung während dafür geeigneter Unterrichtsphasen statt.

4.3 Schriftliche Leistungsüberprüfungen

- Die Klausuren sollen die Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler überprüfen, Mathematik in vielfältigen, auch komplexeren Aufgaben im inner- und außermathematischen Bereich anzuwenden. Mit den Klausuren in den Grund- und Leistungskursen erfolgt auch eine Vorbereitung auf die schriftliche Prüfung im zentralen Abitur.

- Benotete schriftliche Lernerfolgskontrollen, deren Anzahl die jeweilige Fachkonferenz empfehlen kann, können der Kontrolle der individuellen Verfügbarkeit von Wissen und Können in einem begrenzten mathematischen Bereich dienen. Der mathematische Aufsatz kann hier seinen Ort finden.

- Benotete schriftliche Lernerfolgskontrollen können nach dem Übergang in die Qualifikationsphase auch der Vorbereitung auf die erste Semesterklausur dienen.
- Die schriftliche Hausaufgabenkontrolle ermöglicht eine Kontrolle der Bewältigung der Hausaufgaben sowie eine Bewertung.

4.4 Besondere Aspekte der Leistungsbewertung

- In Referaten beschäftigen sich Schülerinnen und Schüler in Einzel- oder in Gruppenarbeit mit einem abgegrenzten Teilbereich der Mathematik. Eine schriftliche Vorlage sollte erstellt werden. Die Beurteilung eines Referats unterliegt Kriterien, die den Schülern vorher genannt werden müssen. Die Fachkonferenz kann Grundsätze empfehlen, wobei die Fähigkeit zur Präsentation angemessen berücksichtigt werden sollte.
- Unter einem Portfolio versteht man eine zielgerichtete Sammlung von Schülerarbeiten, in denen die Schülerinnen und Schüler ihre eigenen, individuellen Lernfortschritte im Sinne von kumulativem Lernen dokumentieren und bewerten. Die Lehrerinnen und Lehrer sollen diese einsammeln und beurteilen. Dabei sollten auch vertikale und horizontale Vernetzungen aufgezeigt werden.
- In einem Lerntagebuch notieren die Schülerinnen und Schüler ihre persönlichen Auffassungen vom Unterrichtsgeschehen. Die Bewertung darf an dieser Stelle das Individuelle der Sammlung nicht verwischen. Die Korrektur sollte vielmehr Gesprächsanlass sein, um mögliche Unstimmigkeiten oder Missverständnisse auszuräumen.
- Projektorientiertes Lernen kann einen Höhepunkt im Unterricht darstellen. Entweder rein mathematische oder fachübergreifende Projekte bieten sich an. Bei fachübergreifenden Projekten gibt es die Möglichkeit des modularen Aufbaus - Fachgruppen bearbeiten das Thema unter fachspezifischen Aspekten - oder des integrierten Aufbaus - alle Projektgruppen bearbeiten das Thema unter Aspekten verschiedener Fächer. Der hohe Zeitaufwand in der häuslichen Arbeit ist bei der Projektbewertung und deren Gewichtung für die Halbjahresnote zu beachten.
- In verschiedenen Ebenen wird das Lernen durch Lehren im Unterricht seine Anwendung finden. Es beginnt beim Helfen in Gruppen- und Partnerarbeit, geht über das interaktive Referat und endet in der selbstgestalteten Unterrichtssequenz. Je nach Leistungsvermögen können Schülerinnen und Schüler ihre unterschiedlichen Kompetenzen für die gesamte Lerngruppe einbringen. Es können auch Gruppen eine Unterrichtsstunde vorbereiten und gestalten.
- Echte Rollenspiele dürften im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II eher eine untergeordnete Bedeutung behalten. Es besteht aber z. B. die Möglichkeit, unterschiedliche Modelle zur Problemlösung kontrovers darzustellen.